<- Sommaire Site AP ou Résultats généraux sur les suites de Fibonacci.

http://alain.pichereau.pages.perso-orange.fr
marc.pichereau@wanadoo.fr

Jeu de Nim-Fibonacci

On dispose d'un "tas" de N pions avec $N\geq 2$; note : le jeu de Nim proprement dit comporte plusieurs tas.
Deux joueurs retirent alternativement des pions, et le gagnant est celui qui arrive à vider le tas.
Les contraintes sont les suivantes :

- chaque fois qu'un joueur joue, il doit prendre au moins un pion
- le 1er à jouer doit laisser au moins un pion
- à partir du 2ième retrait de pion, chaque joueur retire au plus le double de pions retirés le coup précédent par son adversaire

Au cours du jeu, un joueur peut être amené à laisser un seul pion (compte-tenu des contraintes précédentes : par exemple, son adversaire vient de retirer un seul pion et il en reste 3) ; auquel cas d'ailleurs il perd le coup suivant.

Soit $n\geq 1$, le nombre de pions à l'issue d'un nombre quelconque de retraits (n peut être égal à N).
Bien sûr **le joueur qui hérite de cette situation doit, soit tout retirer s'il le peut, sinon il doit retirer moins de n/3 jetons** (sinon il va en retirer $r\geq n/3$, donc il va en rester $n'=n-r\leq 2n/3 \leq 2r$, et son adversaire pourra retirer tous les pions le coup suivant!).
Malheureusement, cette remarque ne suffit pas à mettre au point une statégie gagnante.

Par contre, il est possible d'élaborer une stratégie gagnante en considérant (voir P11) la décomposition de Zeckendorf (notée Z_d) de n :

> la Z_d de n s'écrit $n=F(i_k)+...+F(i_2)+F(i_1)$ avec $i_j\geq i_{j-1}+2$, $i_1\geq 2$: elle comprend k termes, $(k\geq 1)$. **Le plus petit terme de la Z_d de n, $F(i_1)$, sera noté f_n.**

La preuve de cette stratégie gagnante reposera sur le 3) de P11.

On a les propriétés suivantes (si on le souhaite, on peut aller tout de suite au n°6 ci-dessous où on donne une stratégie gagnante) :

- 1) $f_n\leq n$ (évident)
- 2) $f_n=n \Leftrightarrow n$ est un terme de la suite (F) (évident)
- 3) si $f_n<n$ alors , $f_n<n/3$
  en effet
  puisque $n\neq f_n$, il y a au moins deux termes dans la Z_d de n et donc $n\geq F(i_1+2)+F(i_1)=F(i_1+1)+2F(i_1)>3F(i_1)$, puisque la suite (F) est strictement croissante à partir du rang 2 ($F_2<F_3$....), ce qui donne bien $n>3f_n$
- 4) **si le joueur (A) qui hérite d'un tas contenant n pions ($n\geq 1$) en retire f_n pions (si les contraintes de jeu le permettent), alors**
  soit $f_n=n$ et A gagne tout de suite (évidemment)

  soit $f_n<n$ (donc $k\geq 2$ et $n\geq 3+1=4$) et alors

  - le joueur suivant (B) ne peut retirer qu'un nombre K de pions tel que $1 \leq K < F(i_2)$ (**donc B ne peut tout retirer)**
  - **et en notant $n' = n - F(i_1) - K$ le nombre de pions que B va lui laisser, A pourra retirer $f_{n'}$ pions (même si $n' = f_{n'}$)**.

en effet, pour le cas $f_n < n$:

a) $F(i_2)$ et $F(i_1)$ n'étant pas consécutifs, $F(i_2) \geq F(i_1+2) = F(i_1+1) + F(i_1) > 2F(i_1) = 2f_n$: comme le joueur B peut retirer au plus $2f_n$, c'est que $K < F(i_2)$; quant à $1 \leq K$, cela résulte des contraintes.

b) Il s'agit de montrer maintenant que $f_{n'} \leq 2K$.
Il suffit d'appliquer le 3) de P11 en prenant $e = n - F(i_1)$, donc $f_e = F(i_2)$ (rappel : $k \geq 2$), soit $f_e \geq 3$ (puisque $F(i_2)$ et $F(i_1)$ ne sont pas consécutifs).
Comme $1 \leq K < F(i_2)$ on a $1 \leq K < f_e$ et n' étant $n - F(i_1) - K$, on a $n' = e - K$, donc le 3) de P11 donne $f_{n'} \leq 2K$.
Ainsi le joueur A peut retirer $f_{n'}$ pions du tas, cela, peu importe si ce $f_{n'}$ est égal ou non à n'.

- 5) **Si le joueur (A) qui hérite d'un tas contenant $n(\geq 1)$ pions en retire f_n (c'est le plus petit terme de la Z_d de n) pions (cela si les contraintes du jeu le permettent), alors ce joueur est certain de pouvoir gagner la partie (quoique fasse l'autre joueur) : soit il gagne à ce coup, sinon il suffit qu'à chaque fois que ce sera ensuite son tour de jouer, il retire du tas un nombre de pions égal au plus petit terme de la Z_d du nombres de pions constituant alors le tas (il pourra effectivement le faire)**
en effet

soit $f_n = n$ (cad n est un terme de la suite (F)) et A gagne tout de suite
soit $f_n < n$, et cf 4), l'autre joueur B ne peut tout retirer, et si n' est le nombre de pions laissés par B, A peut en retirer $f_{n'}$

soit $f_{n'} = n'$ et A gagne
soit $f_{n'} < n'$ et B ne peut tout retirer et laisse n'' pions dont A peut en retirer $f_{n''}$

etc...

Comme le nombre de pions restant sur le tas diminue strictement à chaque retrait, le jeu ne peut "éternellement" continuer, donc au bout d'un nombre fini de retraits le nombre de pions restant sera un terme de (F) et A pourra alors les retirer tous et donc gagnera.

6) Conclusion : une stratégie gagnante.

N étant le nombre de pions du tas au départ,

  - **soit N est différent d'un terme de (F) et le 1er joueur à jouer est certain de pouvoir gagner, en retirant à chaque fois qu'il joue un nombre de pions égal au plus petit terme de la Z_d du nombre de pions constituant alors le tas.**
  - **soit N est un terme de (F) et le 2ième joueur à jouer est certain de pouvoir gagner, en retirant à chaque fois qu'il joue un nombre de pions égal au plus petit terme de la Z_d du nombre de pions constituant alors le tas.**

Ces deux aspects se résument par

Un joueur est certain de pouvoir gagner ce jeu de Nim-Fibonacci

si et seulement si

il joue en 1er et N n'est pas un terme de la suite (F)
ou
il joue en 2ième et N est un terme de la suite (F)

en effet

si N est différent d'un terme de (F) c'est que $f_N<N$, et donc le 1er joueur à jouer peut retirer f_N pions et, cf 5), il est donc certain de pouvoir gagner.

si N est un terme de (F), le 1er joueur ne peut retirer $f_N=N$ pions puisqu'il doit en laisser au moins 1 (voir contraintes), donc il va en retirer $K<f_N$ et il restera $n'=f_N-K$ pions.
On peut alors encore appliquer le 3) de P11 avec $e=f_N=N$, donc $f_e=f_N=N\geq 2$. Comme $1\leq K<f_N$ et $n'=e-K$, ce 3) de P11 donne alors $f_{n'}\leq 2K$.
Ainsi le 2ième joueur va pouvoir retirer $f_{n'}$ pions et, cf 5), il est certain de pouvoir gagner.

Remarque 1 : **lorsqu'un joueur hérite d'un tas constitué de n pions ($n\geq 2$) et en retire moins que f_n , il est alors certain de perdre** si son adversaire retire à chaque fois qu'il joue un nombre de pions égal au plus petit terme de la Z_d du nombre de pions constituant alors le tas (il pourra le faire).
En effet
on applique encore le 3) de P11 avec e=n, donc $f_e=f_n$; comme le joueur retire (effectivement) K pions avec $K<f_n$, c'est que $f_e=f_n\geq 2$ et ainsi $1\leq K<f_e$ et donc, en posant $n'=e-K$, le 3) de P11 donne $f_{n'}\leq 2K$. Mais ce n' n'est autre que le nombre de pions restants, et donc son adversaire pourra en retirer $f_{n'}$ pions le coup suivant et ainsi cf le 5) ce dernier est certain de pouvoir gagner.
Remarque 2 : **lorsqu'un joueur hérite d'un tas constitué de n pions ($n\geq 2$) et peut en retirer f_n , il se peut que ce soit la seule valeur à ôter lui assurant de pouvoir gagner**.
Exemple : **dans le cas n=88, la seule valeur à ôter assurant de pouvoir gagner la partie est $1=f_{88}$**!
en effet (on appelle A le joueur qui hérite de ce tas, B son adversaire)
$n=88=55+21+8+3+1=F_{10}+F_8+F_6+F_4+F_2$, donc $f_{88}=F_2=1$
si A ôte $1=f_{88}$, il est certain de pouvoir gagner, cf le 5)
si A ôte 2 pions, il reste $n'=F_{10}+F_8+F_6+F_4$: B peut en ôter $f_{n'}=F_4=3\leq 2\times 2$, et donc cf 5) c'est B qui est certain de pouvoir gagner
si A ôte 3 pions, il reste $n'=F_{10}+F_8+F_6+F_2$: B peut en ôter $f_{n'}=F_2=1\leq 2\times 3$, et donc cf 5) c'est B qui est certain de pouvoir gagner
si A ôte 4 pions, il reste $n'=F_{10}+F_8+F_6$: B peut en ôter $f_{n'}=F_6=8\leq 2\times 4$, et donc cf 5) c'est B qui est certain de pouvoir gagner
si A ôte 5 pions, il reste $n'=F_{10}+F_8+F_5+F_3$: B peut en ôter $f_{n'}=F_3=2\leq 2\times 5$, et donc cf 5) c'est B qui est certain de pouvoir gagner

etc...(je laisse le lecteur écrire les cinq cas manquants)

si A ôte 11 pions, il reste $n'=F_{10}+F_8+F_2$: B peut en ôter $f_{n'}=F_2=1\leq 2\times 11$, et donc cf 5) c'est B qui est certain de pouvoir gagner
si A ôte 12 pions, il reste $n'=F_{10}+F_8$: B peut en ôter $f_{n'}=F_8=21\leq 2\times 12$, et donc cf 5) c'est B qui est certain de pouvoir gagner
si A ôte x pions avec $x\in\{13; 14; .... ; 29\}$, on ne va pas "toucher " à F_{10}, cad la Z_d de $n'=n-x$ aura un plus petit terme forcément inférieur à $F_8=21\leq 2x$, et donc cf 5) c'est B

qui est certain de pouvoir gagner.

Enfin, si A ôte plus de 29 pions, c'est que le nombre de pions ôtés est $\geq n/3=29,3$ et dans ce cas le joueur B gagne le coup suivant puisqu'il pourra tout ôter!

Remarque 3 : **lorsqu'un joueur hérite d'un tas constitué de $n=F(i_k)+...+F(i_2)+F(i_1)$ pions, et qu'il ne peut tout ôter, mais simplement ôter f_n pions (ce qui lui assure d'être certain de pouvoir gagner, cf 5)), il peut "accélérer son processus de victoire", en ôtant $s=F(i_{k-1})+...+F(i_2)+F(i_1)$ pions, ceci, à la condition express que s vérifie les deux conditions $s\leq 2\times$le nombre de pions ôtés par le joueur précédent et $s<n/3$.**

En effet, il va rester $F(i_k)$ pions que son adversaire ne pourra ôter entièrement (car $s<n/3 \Rightarrow F(i_k)=n-s>2s$), et donc son adversaire va perdre (voir 6) : cas du joueur qui est le 1er à jouer avec $N=f_N$ et qui ne peut tout retirer).

Bien entendu cette possibilité est plus rare que celle d'ôter $F(i_1)$ pions, à cause des deux limitations indiquées ci-dessus.
D'ailleurs, si on revient sur l'exemple précédent $n=88=F_{10}+F_8+F_6+F_4+F_2$, on a $s=F_8+F_6+F_4+F_2=33\geq n/3$: il n'est donc pas question d'ôter s.

Enfin, **ôter plus que s (toujours lorsque cela est possible) n'assure pas le gain de la partie**.
Par exemple pour $n=99=F_{11}+F_6+F_3$:

le joueur qui ôte $F_3=2$ pions est certain de pouvoir gagner, cf le 5),
de même s'il ôte $s=F_6+F_3=10$ pions, cf ci-dessus ;
mais s'il ôte 11 pions, il en reste 88 et c'est son adversaire, pouvant ôter 1 pion, qui est certain de pouvoir gagner : voir exemple du 8).