

Enoncé

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_{n+1} = \frac{1}{u_n + \frac{1}{n+1}} \text{ pour } u_0 \in \mathbb{C}, u_0 \text{ étant évidemment choisi de telle sorte que pour tout } n$$

dans \mathbb{N} , u_n soit effectivement défini!

Déterminer l'ensemble E des u_0 qui conviennent.

Montrer que pour tout u_0 dans E , la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, et si L est sa limite donner un équivalent de $u_n - L$.

Solution

Dans tout ce qui suit la lettre ε désignera toujours une fonction de l'entier naturel n telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon = 0$.

Résultat 1 : étude d'une suite auxiliaire

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de nombres rationnels définie par $z_n = \frac{4^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^2} = \frac{4^{2n}}{(C_{2n}^n)^2} : z_0 = 1,$

$$z_1 = 4, z_2 = \frac{64}{9}, z_3 = \frac{256}{25}.$$

Cette suite a les propriétés suivantes :

1.1 $\forall n \geq 0, z_{n+1} = \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} z_n$, et donc la suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante

1.2 $\forall n \geq 1, z_n = \frac{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \dots \times 4^2 \times 2^2}{(2n-1)^2 \times (2n-3)^2 \times \dots \times 3^2 \times 1^2}$

1.3 Les suites $(\frac{z_n}{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{z_n}{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes (strictement monotones) de limite commune $\frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \geq 1, \frac{z_n}{2n+1} < \frac{\pi}{2} < \frac{z_n}{2n}$

1.4 $\forall n \geq 1, \frac{z_n}{2n+1} > 1$

1.5 $\forall n \geq 1, z_n = n\pi(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2})$

preuve

1.1 et **1.2** sont immédiats.

$$\mathbf{1.3} : \frac{z_{n+1}}{n+1} - \frac{z_n}{n} = \frac{(n+1)z_n(\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} - 1)}{n(n+1)} = \frac{(n+1)z_n(\frac{-1}{(2n+1)^2})}{n(n+1)} < 0$$

$$\frac{z_{n+1}}{2n+3} - \frac{z_n}{2n+1} = \frac{z_n}{2n+1}(\frac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} - 1) = \frac{z_n}{2n+1}(\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}) > 0$$

La suite $(\frac{z_n}{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant décroissante et minorée par 0 elle converge vers l , donc,

puisque $\frac{z_n}{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \frac{z_n}{2n}$, la suite $(\frac{z_n}{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ a aussi pour limite l , et ces deux suites sont adjacentes.

Pour déterminer l tout de suite (ce qui n'est pas vraiment nécessaire, le 1.5 donnant

aussi la réponse), j'utilise une formule de Wallis qui dit que $C_{2n}^n \sim \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$, soit

$$z_n \sim \frac{4^{2n}}{\frac{4^{2n}}{n\pi}} = n\pi, \text{ et donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n}{n} = \pi, \text{ ce qui donne } l = \frac{\pi}{2}.$$

1.4 : $z_1 = 4 > 2 \times 1 + 1$.

Si pour $n \geq 1$ on a $z_n > 2n + 1$, alors cf 1.1, $z_{n+1} > \frac{(2n+2)^2}{2n+1} > 2n+3$, ce qui prouve, par récurrence, que pour $n \geq 1$ on a $z_n > 2n + 1$ (faux si $n = 0$).

1.5 : pour le dernier résultat, j'utilise la formule de Stirling à l'ordre 2, à savoir

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\right), \text{ ce qui donne}$$

$$z_n = \frac{4^{2n} n^{4n+2} e^{-4n} (2\pi)^2 \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\right)^4}{(2n)^{4n+1} e^{-4n} 2\pi \left(1 + \frac{1}{24n} + \frac{1}{1152n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\right)^2} = \frac{1}{2} \times n \times 2\pi \times \frac{\left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\right)^4}{\left(1 + \frac{1}{24n} + \frac{1}{1152n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\right)^2}$$

Compte-tenu des règles habituelles relatives aux opérations sur les développements limités,

$$\text{on obtient } z_n = n\pi \frac{1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{18n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}}{1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}} = n\pi \left(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}\right); \text{ on retrouve bien}$$

$$\text{(cf 1.3), } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{z_n}{n} = \pi \blacksquare$$

Résultat 2 : détermination de E

2.1 :

$$\forall n \geq 1,$$

$$u_1, u_2, \dots, u_{2n} \text{ sont définis } \Leftrightarrow u_0 \notin F_n = \left\{-1; -\frac{9}{7}; -\frac{75}{53}; \dots; \frac{2n}{2n-z_n}\right\} \cup \left\{-3; -\frac{45}{19}; -\frac{175}{81}; \dots; \frac{2n+1}{2n+1-z_n}\right\}$$

et

$$\text{pour } u_0 \notin F_n, u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{z_n u_0 + (2n+1)(1-u_0)}$$

On notera que F_n est constitué de rationnels négatifs (voir 1.4).

2.2 :

$$F_n \text{ est de cardinal } 2n, E = C - \bigcup_{n \geq 1} \left\{\frac{2n}{2n-z_n}; \frac{2n+1}{2n+1-z_n}\right\} : E \text{ est donc } C \text{ privé}$$

des valeurs (rationnelles négatives) prises par deux suites adjacentes de limite commune $\frac{2}{2-\pi}$, valeur qui est dans E.

$$\text{Exemple : pour } u_0 \notin F_3 = \left\{-1; -\frac{9}{7}; -\frac{75}{53}\right\} \cup \left\{-3; -\frac{45}{19}; -\frac{175}{81}\right\},$$

$$u_6 = 1 + \frac{u_0 - 1}{\frac{256}{25}u_0 + 7(1-u_0)} = \frac{106u_0 + 150}{81u_0 + 175}.$$

Note :

on peut montrer qu'en considérant les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant toutes deux la même relation de récurrence $w_{n+1} = w_n + n(n+1)w_{n-1}$ pour $n \geq 1$, mais avec des

conditions initiales différentes, à savoir $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $b_0 = b_1 = 1$, alors
 $\forall n \geq 1, u_1, u_2, \dots, u_n$ sont définis si et seulement si $u_0 \notin \{-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \dots, -\frac{b_n}{a_n}\}$ et

$$u_n = n \frac{a_{n-1}u_0 + b_{n-1}}{a_n u_0 + b_n}.$$

Par exemple,

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	0	1	1	7	19	159	729
b_n	1	1	3	9	45	225	1575

et lorsque u_6 est défini, $u_6 = 6 \frac{159u_0 + 225}{729u_0 + 1575} = \frac{106u_0 + 150}{81u_0 + 175}$.

En examinant les cas $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$ (voir 3.1), on s'aperçoit que pour
 $n \geq 1, \frac{b_{2n}}{b_{2n-1}} = 2n + 1, \frac{b_{2n-1}}{b_{2n-2}} = 2n - 1, a_{2n} = p_{n+1} - b_{2n}, a_{2n-1} = 2np_n - b_{2n-1}$ avec
 $p_n = 2^{2(n-1)}((n-1)!)^2$.

C'est en commençant par cette voie que j'ai "rencontré" la suite $z_n : \frac{p_n}{b_{2n-1}} = \frac{z_n}{4n^2}$

preuve

2.1 : on raisonne par récurrence.

u_1 est évidemment défini pour $u_0 \neq -1$, et alors u_2 sera défini pour

$u_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{2} \neq 0$, soit $u_0 \neq -3$: donc u_1 et u_2 sont définis $\Leftrightarrow u_0 \notin F_1$, et alors

$$u_2 = \frac{1}{\frac{1}{u_0 + 1} + \frac{1}{2}} = \frac{2u_0 + 2}{u_0 + 3}, \text{ ce qui donne } u_2 - 1 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{u_0 - 1}{z_1 u_0 + (2 \times 1 + 1)u_0}.$$

Supposons maintenant que pour $n \geq 1$, on ait

$$u_1, u_2, \dots, u_{2n} \text{ définis } \Leftrightarrow u_0 \notin F_n \text{ et pour } u_0 \notin F_n, u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{z_n u_0 + (2n + 1)(1 - u_0)}.$$

u_{2n+1} sera alors défini $\Leftrightarrow u_{2n} \neq -\frac{1}{2n + 1}$, soit

$$u_{2n} - 1 \neq -\frac{2n + 2}{2n + 1} \Leftrightarrow -(2n + 1)(u_0 - 1) \neq (z_n u_0 + (2n + 1)(1 - u_0))(2n + 2)$$

$$\Leftrightarrow u_0((2n + 1)^2 - z_n(2n + 2)) \neq (2n + 1)^2 \Leftrightarrow u_0((2n + 1)^2 - \frac{(2n + 1)^2 z_{n+1}}{2n + 2}) \neq (2n + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow u_0(1 - \frac{z_{n+1}}{2n + 2}) \neq 1.$$

Comme $z_n \neq 2n$ (voir 1.3 ou 1.4), u_{2n+1} est défini $\Leftrightarrow u_0 \neq \frac{2n + 2}{2n + 2 - z_{n+1}}$ (et bien sûr $u_0 \notin F_n$).

Et dans ce cas, u_{2n+2} sera défini ssi $u_{2n+1} \neq -\frac{1}{2n + 2}$.

$$u_{2n+1} + \frac{1}{2n + 2} = \frac{2n + 2 + u_{2n} + \frac{1}{2n + 1}}{(2n + 2)(u_{2n} + \frac{1}{2n + 1})} = \frac{\frac{(2n + 2)^2}{2n + 1} + u_{2n} - 1}{\frac{(2n + 2)^2}{2n + 1} + (2n + 2)(u_{2n} - 1)}$$

$$u_{2n+1} + \frac{1}{2n + 2} = \frac{\frac{(2n + 2)^2}{2n + 1} + \frac{u_0 - 1}{z_n u_0 + (2n + 1)(1 - u_0)}}{\frac{(2n + 2)^2}{2n + 1} + (2n + 2)\frac{u_0 - 1}{z_n u_0 + (2n + 1)(1 - u_0)}} = \frac{z_{n+1} u_0 + \frac{(2n + 2)^2 - 1}{2n + 1}(1 - u_0)}{z_{n+1} u_0 + \frac{(2n + 2)^2 - (2n + 2)}{2n + 1}(1 - u_0)}$$

$$u_{2n+1} + \frac{1}{2n + 2} = \frac{z_{n+1} u_0 + (2n + 3)(1 - u_0)}{z_{n+1} u_0 + (2n + 2)(1 - u_0)}$$

D'où $u_{2n+1} \neq -\frac{1}{2n + 2} \Leftrightarrow u_0(z_{n+1} - (2n + 3)) \neq -(2n + 3)$, et comme (voir 1.4)

$z_{n+1} \neq 2n + 3$, cela donne $u_0 \neq \frac{2n+3}{2n+3-z_{n+1}}$.

Donc $u_1, u_2, \dots, u_{2n}, u_{2n+1}, u_{2n+2}$ sont définis $\Leftrightarrow u_0 \notin F_{n+1}$

Et alors

$$u_{2n+2} - 1 = \frac{1}{u_{2n+1} + \frac{1}{2n+2}} - 1 = \frac{(2n+2 - (2n+3))(1-u_0)}{z_{n+1}u_0 + (2n+3)(1-u_0)} = \frac{u_0 - 1}{z_{n+1}u_0 + (2n+3)(1-u_0)}.$$

Ce qui termine la récurrence .

2.2 : Pour $n \geq 1$, $\frac{2n}{2n-z_n} = \frac{1}{1-\frac{z_n}{2n}}$ et $\frac{2n+1}{2n+1-z_n} = \frac{1}{1-\frac{z_n}{2n+1}}$.

Puisque, cf 1.3, les suites $(\frac{z_n}{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{z_n}{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes (strictement monotones), F_n est évidemment de cardinal $2n$.

Le fait que $E = C - \cup_{n \geq 1} \{ \frac{2n}{2n-z_n}; \frac{2n+1}{2n+1-z_n} \}$ est évidemment une application immédiate de 2.1, puisque

$\forall n \geq 1 u_1, u_2, \dots, u_{2n}$ sont définis $\Leftrightarrow \forall n \geq 1 u_1, u_2, \dots, u_n$ sont définis.

Allons plus loin.

Puisque la suite $(\frac{z_n}{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante et que $\frac{z_n}{2n}$ est toujours supérieur à 1 puisque supérieur à $\frac{\pi}{2}$ (cf 1.3), la suite $(\frac{1}{1-\frac{z_n}{2n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est aussi strictement

décroissante ; de même la suite $(\frac{z_n}{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et $\frac{z_n}{2n+1}$ étant toujours supérieur à 1 (suite croissante qui commence à 1), la suite $(\frac{1}{1-\frac{z_n}{2n+1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$

est strictement croissante.

Mais, toujours cf 1.3, les suites $(\frac{1}{1-\frac{z_n}{2n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\frac{1}{1-\frac{z_n}{2n+1}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ ont la même limite

$$\frac{1}{1-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2-\pi}, \text{ donc elles sont adjacentes ; cette valeur est bien dans } E \text{ puisqu'elle}$$

n'est pas atteinte : soit on invoque la stricte monotonie, soit on dit qu'elle n'est pas rationnelle ■

Résultat 3 : limite, équivalent de la suite u_n

3.1 : Si $u_0 = 0$ alors pour $n \geq 0$, $u_{2n} = 1 - \frac{1}{2n+1}$, $u_{2n+1} = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

3.2 : Si $u_0 = 1$ alors pour $n \geq 0$, $u_{2n} = 1$, $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

3.3 :

Si $u_0 \in E$ avec $u_0 \neq 0$, $u_0 \neq 1$, $u_0 \neq \frac{2}{2-\pi}$
 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$, $u_{2n} - 1 \sim \frac{u_0 - 1}{((\pi - 2)u_0 + 2)n}$, $u_{2n+1} - 1 \sim -\frac{\pi u_0}{2((\pi - 2)u_0 + 2)n}$

Exemple 1 : $u_0 = 9$

Dans ce cas $u_{2n} - 1 \sim \frac{0,65176\dots}{n}$, $u_{2n+1} - 1 \sim -\frac{1,15176\dots}{n}$ et on peut vérifier (un tableur suffit) que $u_{100} = 1,01305\dots$, $u_{101} = 0,97755\dots$ alors que

$$1 + \frac{0,65176\dots}{50} = 1,01303\dots \text{ et } 1 - \frac{1,15176\dots}{50} = 0,97696\dots$$

Exemple 2 : $u_0 = i$

$$u_{2n} - 1 \sim \frac{\pi - 4}{n((\pi - 2)^2 + 4)} + \frac{\pi}{n((\pi - 2)^2 + 4)} i \text{ et on peut vérifier que}$$

$$u_{100} = 0,99671\dots + 0,01175\dots \times i \text{ alors que}$$

$$1 + \frac{\pi - 4}{50((\pi - 2)^2 + 4)} + \frac{\pi}{50((\pi - 2)^2 + 4)} i = 0,99676\dots + 0,01184\dots$$

Note 1 :

la somme des deux coefficients de $\frac{1}{n}$ dans les deux équivalents ci-dessus est toujours $-0,5$.

Note 2 :

si $u_0 = 0$, l'équivalent ci-dessus de $u_{2n} - 1$ est encore licite car non nul : c'est $-\frac{1}{2n}$, cohérent avec le fait que dans ce cas $u_{2n} = 1 - \frac{1}{2n+1}$

si $u_0 = 1$, l'équivalent ci-dessus de $u_{2n+1} - 1$ est encore licite car non nul : c'est $-\frac{1}{2n}$, cohérent avec le fait que dans ce cas $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$

3.4 :

Si $u_0 = \frac{2}{2-\pi} \simeq -1,7519$
alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$, $u_n + 1 \sim -\frac{1}{2n}$

Vérification : $u_{100} = 1,00499\dots$, $u_{101} = 0,00494\dots$ alors que $-1 - \frac{1}{200} = -1,005$ et $-1 - \frac{1}{202} = -1,00495\dots$

Note 3 :

si on prend $u_0 = -1,75 \simeq \frac{2}{2-\pi}$, alors cf le 3.3 $u_{2n} - 1 \sim -\frac{1242,7\dots}{n}$ et donc pour que u_{2n} soit environ à $\frac{1}{10}$ de la limite 1, il faut $n \simeq 12500$

preuve

Rappel : une suite a pour limite $l \Leftrightarrow$ la sous-suite constituée des termes de rangs pairs et la sous-suite constituée des rangs impairs ont pour limite l .

3.1 et 3.2 sont immédiats par une récurrence évidente.

3.3 et 3.4 : cf les résultats 1.5 et 2.1,

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{[\pi u_0 (1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}) + (2 + \frac{1}{n})(1 - u_0)]n}$$

(si $u_0 = 0$ on trouve bien $u_{2n} = 1 - \frac{1}{2n+1}$ et si $u_0 = 1$ on trouve bien $u_{2n} = 1$)

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{[(\pi - 2)u_0 + 2 + \frac{(\pi - 4)u_0 + 4}{4n} + \frac{\pi u_0}{32n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}]n}$$

Dans le cas $u_0 \neq \frac{2}{2-\pi}$, cad $(\pi - 2)u_0 + 2 \neq 0$, on peut écrire

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{((\pi - 2)u_0 + 2 + \varepsilon)n} = \frac{u_0 - 1}{((\pi - 2)u_0 + 2)(1 + \varepsilon)n}, \text{ soit}$$

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{((\pi - 2)u_0 + 2)n} (1 + \varepsilon) \text{ et ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = 1 \text{ avec,}$$

lorsque $u_0 \neq 1$, $u_{2n} - 1 \sim \frac{u_0 - 1}{((\pi - 2)u_0 + 2)n}$.

Pour u_{2n+1} on utilise $u_{2n+1} = \frac{1}{u_{2n} + \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{u_0 - 1}{((\pi - 2)u_0 + 2)n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{2n+1}}$, d'où

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = 1$.

Et comme $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{n}$ (pour $n \geq 1$),

$$u_{2n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\pi u_0}{2((\pi - 2)u_0 + 2)n} + \frac{\varepsilon}{n}} = 1 - \frac{\pi u_0}{2((\pi - 2)u_0 + 2)n} + \frac{\varepsilon}{n}$$

et ainsi, lorsque $u_0 \neq 0$, $u_{2n+1} - 1 \sim -\frac{\pi u_0}{2((\pi - 2)u_0 + 2)n}$.

Dans le cas $u_0 = \frac{2}{2-\pi}$, on a $(\pi - 2)u_0 + 2 = 0$ et alors

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{\frac{(\pi - 4)u_0 + 4}{4} + \frac{\pi u_0}{32n} + \frac{\varepsilon}{n}} = \frac{-2}{1 - \frac{1}{8n} + \frac{\varepsilon}{n}}$$

d'où $u_{2n} - 1 = -2(1 + \frac{1}{8n} + \frac{\varepsilon}{n})$, soit $u_{2n} + 1 = \frac{-1}{4n}(1 + \varepsilon)$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = -1$ et

$$u_{2n} + 1 \sim -\frac{1}{4n}$$

Enfin $u_{2n+1} = \frac{1}{u_{2n} + \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{-1 - \frac{1}{4n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{2n+1}}$, ce qui grâce encore à

$$\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n} + \frac{\varepsilon}{n} \text{ (pour } n \geq 1\text{)}, \text{ s'écrit } u_{2n+1} = \frac{1}{-1 + \frac{1}{4n} + \frac{\varepsilon}{n}} = -(1 + \frac{1}{4n} + \frac{\varepsilon}{n}), \text{ d'où}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = -1$ et $u_{2n+1} + 1 \sim -\frac{1}{4n} \sim -\frac{1}{4n+2}$;

comme on vient de voir que $u_{2n} + 1 \sim -\frac{1}{4n}$, c'est que finalement $u_n + 1 \sim -\frac{1}{2n}$ ■