Enoncé

On considère la suite $(u_n)_{n\in N}$ définie par

$u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + \dfrac{1}{n+1}}$ pour $u_0 \in C$, u_0 étant évidemment choisi de telle sorte que pour tout n dans N, u_n soit effectivement défini!

Déterminer l'ensemble E des u_0 qui conviennent.

Montrer que pour tout u_0 dans E, la suite $(u_n)_{n\in N}$ est convergente, et si L est sa limite donner un équivalent de $u_n - L$.

Solution

Dans tout ce qui suit la lettre ε désignera toujours une fonction de l'entier naturel n telle que $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon = 0$.

Résultat 1 : **étude d'une suite auxiliaire**

Soit $(z_n)_{n\in N}$ la suite de nombres rationnels définie par $z_n = \dfrac{4^{2n}(n!)^4}{((2n)!)^2} = \dfrac{4^{2n}}{(C_{2n}^n)^2}$: $z_0 = 1$, $z_1 = 4$, $z_2 = \dfrac{64}{9}$, $z_3 = \dfrac{256}{25}$.

Cette suite a les propriétés suivantes :

1.1 $\forall n \geq 0,\ z_{n+1} = \dfrac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} z_n$, et donc la suite $(z_n)_{n\in N}$ est strictement croissante

1.2 $\forall n \geq 1,\ z_n = \dfrac{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \times \ldots \times 4^2 \times 2^2}{(2n-1)^2 \times (2n-3)^2 \times \ldots \times 3^2 \times 1^2}$

1.3 Les suites $(\frac{z_n}{2n})_{n\in N^*}$ et $(\frac{z_n}{2n+1})_{n\in N^*}$ sont adjacentes (strictement monotones) de limite commune $\frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{z_n}{2n+1} < \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{z_n}{2n}$

1.4 $\forall n \geq 1,\ \dfrac{z_n}{2n+1} > 1$

1.5 $\forall n \geq 1,\ z_n = n\pi(1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{32n^2} + \dfrac{\varepsilon}{n^2})$

---

preuve

1.1 et **1.2** sont immédiats.

1.3 : $\dfrac{z_{n+1}}{n+1} - \dfrac{z_n}{n} = \dfrac{(n+1)z_n(\frac{4n(n+1)}{(2n+1)^2} - 1)}{n(n+1)} = \dfrac{(n+1)z_n(\frac{-1}{(2n+1)^2})}{n(n+1)} < 0$

$\dfrac{z_{n+1}}{2n+3} - \dfrac{z_n}{2n+1} = \dfrac{z_n}{2n+1}(\dfrac{(2n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)} - 1) = \dfrac{z_n}{2n+1}(\dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}) > 0$

La suite $(\frac{z_n}{2n})_{n\in N^*}$ étant décroissante et minorée par 0 elle converge vers l, donc, puisque $\dfrac{z_n}{2n+1} = \dfrac{2n}{2n+1}\dfrac{z_n}{2n}$, la suite $(\frac{z_n}{2n+1})_{n\in N^*}$ a aussi pour limite l, et ces deux suites sont adjacentes.

Pour déterminer l tout de suite (ce qui n'est pas vraiment nécessaire, le 1.5 donnant aussi la réponse), j'utilise une formule de Wallis qui dit que $C_{2n}^n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{n\pi}}$, soit

$z_n \backsim \dfrac{4^{2n}}{\frac{4^{2n}}{n\pi}} = n\pi$, et donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{z_n}{n} = \pi$, ce qui donne $l = \dfrac{\pi}{2}$.

1.4 : $z_1 = 4 > 2 \times 1 + 1$.

Si pour $n \geq 1$ on a $z_n > 2n+1$, alors cf 1.1, $z_{n+1} > \dfrac{(2n+2)^2}{2n+1} > 2n+3$, ce qui prouve, par récurrence, que pour $n \geq 1$ on a $z_n > 2n+1$ (faux si $n = 0$).

1.5 : pour le dernier résultat, j'utilise la formule de Stirling à l'ordre 2, à savoir $n! = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\,(1 + \dfrac{1}{12n} + \dfrac{1}{288n^2} + \dfrac{\varepsilon}{n^2})$, ce qui donne

$$z_n = \frac{4^{2n} n^{4n+2} e^{-4n} (2\pi)^2 (1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2})^4}{(2n)^{4n+1} e^{-4n} 2\pi (1 + \frac{1}{24n} + \frac{1}{1152n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2})^2} = \frac{1}{2} \times n \times 2\pi \times \frac{(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2})^4}{(1 + \frac{1}{24n} + \frac{1}{1152n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2})^2}$$

Compte-tenu des régles habituelles relatives aux opérations sur les développements limités,

on obtient $z_n = n\pi \dfrac{1 + \frac{1}{3n} + \frac{1}{18n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}}{1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}} = n\pi(1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{1}{32n^2} + \dfrac{\varepsilon}{n^2})$; on retrouve bien (cf 1.3), $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{z_n}{n} = \pi$■

Résultat 2 : **détermination de E**

2.1 :

$\forall n \geq 1,$

$u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ sont définis $\Leftrightarrow u_0 \notin F_n = \{-1; -\frac{9}{7}; -\frac{75}{53}; \ldots; \frac{2n}{2n - z_n}\} \cup \{-3; -\frac{45}{19}; -\frac{175}{81}; \ldots; \frac{2n+1}{2n+1-z_n}\}$

et

pour $u_0 \notin F_n$, $u_{2n} - 1 = \dfrac{u_0 - 1}{z_n u_0 + (2n+1)(1-u_0)}$

On notera que F_n est constitué de rationnels négatifs (voir 1.4).

2.2 :

F_n est de cardinal $2n$, $E = C - \cup_{n\geq 1} \{\frac{2n}{2n - z_n}; \frac{2n+1}{2n+1-z_n}\}$: E est donc C privé

des valeurs (rationnelles négatives) prises par deux suites adjacentes de limite commune $\dfrac{2}{2-\pi}$,

valeur qui est dans E.

<u>Exemple</u> : pour $u_0 \notin F_3 = \{-1; -\frac{9}{7}; -\frac{75}{53}\} \cup \{-3; -\frac{45}{19}; -\frac{175}{81}\}$,

$$u_6 = 1 + \frac{u_0 - 1}{\frac{256}{25} u_0 + 7(1 - u_0)} = \frac{106u_0 + 150}{81u_0 + 175}.$$

Note :

on peut montrer qu'en considèrant les deux suites $(a_n)_{n\in N}$ et $(b_n)_{n\in N}$ vérifiant toutes deux la même relation de récurrence $w_{n+1} = w_n + n(n+1)w_{n-1}$ pour $n \geq 1$, mais avec des conditions initiales différentes, à savoir $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $b_0 = b_1 = 1$, alors

$\forall n \geq 1, u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont définis si et seulement si $u_0 \notin \{-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, \ldots, -\frac{b_n}{a_n}\}$ et

$$u_n = n\frac{a_{n-1}u_0 + b_{n-1}}{a_n u_0 + b_n}.$$

Par exemple,

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	0	1	1	7	19	159	729
b_n	1	1	3	9	45	225	1575

et lorsque u_6 est défini, $u_6 = 6\dfrac{159u_0+225}{729u_0+1575} = \dfrac{106u_0+150}{81u_0+175}$.

En examinant les cas $u_0 = 0$ et $u_0 = 1$ (voir 3.1), on s'aperçoit que pour
$n \geq 1, \dfrac{b_{2n}}{b_{2n-1}} = 2n+1,\ \dfrac{b_{2n-1}}{b_{2n-2}} = 2n-1,\ a_{2n} = p_{n+1} - b_{2n},\ a_{2n-1} = 2np_n - b_{2n-1}$ avec
$p_n = 2^{2(n-1)}((n-1)!)^2$.

C'est en commencant par cette voie que j'ai "rencontré" la suite z_n : $\dfrac{p_n}{b_{2n-1}} = \dfrac{z_n}{4n^2}$

---

preuve

2.1 : on raisonne par récurrence.

u_1 est évidemment défini pour $u_0 \neq -1$, et alors u_2 sera défini pour
$u_1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{u_0+1} + \dfrac{1}{2} \neq 0$, soit $u_0 \neq -3$: donc u_1 et u_2 sont définis $\Leftrightarrow u_0 \notin F_1$, et alors
$u_2 = \dfrac{1}{\dfrac{1}{u_0+1} + \dfrac{1}{2}} = \dfrac{2u_0+2}{u_0+3}$, ce qui donne $u_2 - 1 = \dfrac{u_0-1}{u_0+3} = \dfrac{u_0-1}{z_1u_0 + (2\times 1+1)u_0}$.

Supposons maintenant que pour $n \geq 1$, on ait
$u_1, u_2, \ldots, u_{2n}$ définis $\Leftrightarrow u_0 \notin F_n$ **et** pour $u_0 \notin F_n$, $u_{2n} - 1 = \dfrac{u_0-1}{z_nu_0 + (2n+1)(1-u_0)}$.

u_{2n+1} sera alors défini $\Leftrightarrow u_{2n} \neq -\dfrac{1}{2n+1}$, soit
$u_{2n} - 1 \neq -\dfrac{2n+2}{2n+1} \Leftrightarrow -(2n+1)(u_0-1) \neq (z_nu_0 + (2n+1)(1-u_0))(2n+2)$

$\Leftrightarrow u_0((2n+1)^2 - z_n(2n+2)) \neq (2n+1)^2 \Leftrightarrow u_0((2n+1)^2 - \dfrac{(2n+1)^2z_{n+1}}{2n+2}) \neq (2n+1)^2$

$\Leftrightarrow u_0(1 - \dfrac{z_{n+1}}{2n+2}) \neq 1$.

Comme $z_n \neq 2n$ (voir 1.3 ou 1.4), u_{2n+1} est défini$\Leftrightarrow u_0 \neq \dfrac{2n+2}{2n+2-z_{n+1}}$ (et bien sûr
$u_0 \notin F_n$).

Et dans ce cas, u_{2n+2} sera défini ssi $u_{2n+1} \neq -\dfrac{1}{2n+2}$.

$$u_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{2n+2+u_{2n}+\dfrac{1}{2n+1}}{(2n+2)(u_{2n}+\dfrac{1}{2n+1})} = \frac{\dfrac{(2n+2)^2}{2n+1} + u_{2n} - 1}{\dfrac{(2n+2)^2}{2n+1} + (2n+2)(u_{2n}-1)}$$

$$u_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{\dfrac{(2n+2)^2}{2n+1} + \dfrac{u_0-1}{z_nu_0+(2n+1)(1-u_0)}}{\dfrac{(2n+2)^2}{2n+1} + (2n+2)\dfrac{u_0-1}{z_nu_0+(2n+1)(1-u_0)}} = \frac{z_{n+1}u_0 + \dfrac{(2n+2)^2-1}{2n+1}(1-u_0)}{z_{n+1}u_0 + \dfrac{(2n+2)^2-(2n+2)}{2n+1}(1-u_0)}$$

$$u_{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{z_{n+1}u_0 + (2n+3)(1-u_0)}{z_{n+1}u_0 + (2n+2)(1-u_0)}$$

D'où $u_{2n+1} \neq -\dfrac{1}{2n+2} \Leftrightarrow u_0(z_{n+1} - (2n+3)) \neq -(2n+3)$, et comme (voir 1.4)
$z_{n+1} \neq 2n+3$, cela donne $u_0 \neq \dfrac{2n+3}{2n+3-z_{n+1}}$.

Donc $u_1, u_2, \ldots, u_{2n}, u_{2n+1}, u_{2n+2}$ sont définis $\Leftrightarrow u_0 \notin F_{n+1}$

Et alors

$u_{2n+2}-1 = \dfrac{1}{u_{2n+1}+\dfrac{1}{2n+2}} - 1 = \dfrac{(2n+2-(2n+3))(1-u_0)}{z_{n+1}u_0+(2n+3)(1-u_0)} = \dfrac{u_0-1}{z_{n+1}u_0+(2n+3)(1-u_0)}$.

Ce qui termine la récurrence .

2.2 : Pour $n \geq 1$, $\dfrac{2n}{2n-z_n} = \dfrac{1}{1-\dfrac{z_n}{2n}}$ et $\dfrac{2n+1}{2n+1-z_n} = \dfrac{1}{1-\dfrac{z_n}{2n+1}}$.

Puisque, cf 1.3, les suites $(\dfrac{z_n}{2n})_{n\in N^*}$ et $(\dfrac{z_n}{2n+1})_{n\in N^*}$ sont adjacentes (strictement monotones), F_n est évidemment de cardinal $2n$.

Le fait que $E = C - \cup_{n\geq 1}\{\dfrac{2n}{2n-z_n};\dfrac{2n+1}{2n+1-z_n}\}$ est évidemment une application immédiate de 2.1, puisque

$\forall n \geq 1\ u_1,u_2,\ldots,u_{2n}$ sont définis $\Leftrightarrow$ $\forall n \geq 1\ u_1,u_2,\ldots,u_n$ sont définis.

Allons plus loin.

Puisque la suite $(\dfrac{z_n}{2n})_{n\in N^*}$ est strictement décroissante et que $\dfrac{z_n}{2n}$ est toujours supérieur à 1 puisque supérieur à $\dfrac{\pi}{2}$ (cf 1.3), la suite $(\dfrac{1}{1-\dfrac{z_n}{2n}})_{n\in N^*}$ est aussi strictement décroissante ; de même la suite $(\dfrac{z_n}{2n+1})_{n\in N^*}$ est strictement croissante et $\dfrac{z_n}{2n+1}$ étant toujours supérieur à 1 (suite croissante qui commence à 1) , la suite $(\dfrac{1}{1-\dfrac{z_n}{2n+1}})_{n\in N^*}$ est strictement croissante.

Mais, toujours cf 1.3, les suites $(\dfrac{1}{1-\dfrac{z_n}{2n}})_{n\in N^*}$ et $(\dfrac{1}{1-\dfrac{z_n}{2n+1}})_{n\in N^*}$ ont la même limite $\dfrac{1}{1-\dfrac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{2-\pi}$, donc elles sont adjacentes ; cette valeur est bien dans E puisqu'elle n'est pas atteinte : soit on invoque la stricte monotonie, soit on dit qu'elle n'est pas rationnelle ■

Résultat 3 : **limite**, **équivalent de la suite** u_n

3.1 : **Si** $u_0 = 0$ alors pour $n \geq 0$, $u_{2n} = 1-\dfrac{1}{2n+1}$, $u_{2n+1} = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

3.2 : **Si** $u_0 = 1$ alors pour $n \geq 0$, $u_{2n} = 1$, $u_{2n+1} = 1-\dfrac{1}{2(n+1)}$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

3.3 :

Si $u_0 \in E$ avec $u_0 \neq 0,\ u_0 \neq 1,\ u_0 \neq \dfrac{2}{2-\pi}$

alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, $u_{2n}-1 \backsim \dfrac{u_0-1}{((\pi-2)u_0+2)n}$, $u_{2n+1}-1 \backsim -\dfrac{\pi u_0}{2((\pi-2)u_0+2)n}$

Exemple 1 : $u_0 = 9$

Dans ce cas $u_{2n}-1 \backsim \dfrac{0,65176\ldots}{n}$, $u_{2n+1}-1 \backsim -\dfrac{1,15176\ldots}{n}$ et on peut vérifier (un tableur suffit) que $u_{100} = 1,01305\ldots$, $u_{101} = 0,97755\ldots$ alors que $1+\dfrac{0,65176\ldots}{50} = 1,01303\ldots$ et $1-\dfrac{1,15176\ldots}{50} = 0,97696\ldots$

Exemple 2 : $u_0 = i$

$u_{2n}-1 \sim \dfrac{\pi-4}{n((\pi-2)^2+4)} + \dfrac{\pi}{n((\pi-2)^2+4)}i$ et on peut vérifier que

$u_{100} = 0.99671\ldots+0.01175\ldots\times i$ alors que $1 + \frac{\pi-4}{50((\pi-2)^2+4)} + \frac{\pi}{50((\pi-2)^2+4)}i = 0.99676\ldots+0.01184\ldots$

Note 1 :

la somme des deux coefficients de $\frac{1}{n}$ dans les deux équivalents ci-dessus est toujours -0.5.

Note 2 :

si $u_0 = 0$, l'équivalent ci-dessus de $u_{2n} - 1$ est encore licite car non nul : c'est $-\frac{1}{2n}$, cohérent avec le fait que dans ce cas $u_{2n} = 1 - \frac{1}{2n+1}$

si $u_0 = 1$, l'équivalent ci-dessus de $u_{2n+1} - 1$ est encore licite car non nul : c'est $-\frac{1}{2n}$, cohérent avec le fait que dans ce cas $u_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2(n+1)}$

3.4 :

$$\boxed{\begin{array}{l}\textbf{Si } u_0 = \frac{2}{2-\pi} \simeq -1,7519 \\ \text{alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = -1,\ u_n + 1 \backsim -\frac{1}{2n}\end{array}}$$

Vérification : $u_{100} = 1,00499\ldots.,\ u_{101} = 0,00494\ldots$ alors que $-1 - \frac{1}{200} = -1,005$ et $-1 - \frac{1}{202} = -1,00495\ldots$

Note 3 :

si on prend $u_0 = -1,75 \simeq \frac{2}{2-\pi}$, alors cf le 3.3 $u_{2n} - 1 \backsim -\frac{1242,7\ldots}{n}$ et donc pour que u_{2n} soit environ à $\frac{1}{10}$ de la limite 1, il faut $n \simeq 12500$

---

preuve

Rappel : une suite a pour limite $l \Leftrightarrow$ la sous-suite constituée des termes de rangs pairs el la sous-suite constituée des rangs impairs ont pour limite l.

3.1 et **3.2** sont immédiats par une récurrence évidente.

3.3 et 3.4 : cf les résultats 1.5 et 2.1,

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{[\pi u_0(1 + \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}) + (2 + \frac{1}{n})(1 - u_0)]n}$$

(si $u_0 = 0$ on trouve bien $u_{2n} = 1 - \frac{1}{2n+1}$ et si $u_0 = 1$ on trouve bien $u_{2n} = 1$)

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{[(\pi-2)u_0 + 2 + \frac{(\pi-4)u_0 + 4}{4n} + \frac{\pi u_0}{32n^2} + \frac{\varepsilon}{n^2}]n}$$

Dans le cas $u_0 \neq \frac{2}{2-\pi}$, cad $(\pi-2)u_0 + 2 \neq 0$, on peut écrire

$$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{((\pi-2)u_0 + 2 + \varepsilon)n} = \frac{u_0 - 1}{((\pi-2)u_0 + 2)(1+\varepsilon)n},$$ soit

$u_{2n} - 1 = \frac{u_0 - 1}{((\pi-2)u_0 + 2)n}(1+\varepsilon)$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = 1$ avec,

lorsque $u_0 \neq 1,\ u_{2n} - 1 \backsim \frac{u_0 - 1}{((\pi-2)u_0 + 2)n}$.

Pour u_{2n+1} on utilise $u_{2n+1} = \frac{1}{u_{2n} + \frac{1}{2n+1}} = \frac{1}{1 + \frac{u_0 - 1}{((\pi-2)u_0 + 2)n} + \frac{\varepsilon}{n} + \frac{1}{2n+1}}$, d'où

$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = 1$.

Et comme $\dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\varepsilon}{n}$ (pour $n \geq 1$),

$u_{2n+1} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi u_0}{2((\pi-2)u_0+2)n} + \dfrac{\varepsilon}{n}} = 1 - \dfrac{\pi u_0}{2((\pi-2)u_0+2)n} + \dfrac{\varepsilon}{n}$

et ainsi, lorsque $u_0 \neq 0$, $u_{2n+1} - 1 \backsim -\dfrac{\pi u_0}{2((\pi-2)u_0+2)n}$.

Dans le cas $u_0 = \dfrac{2}{2-\pi}$, on a $(\pi-2)u_0 + 2 = 0$ et alors

$u_{2n} - 1 = \dfrac{u_0 - 1}{\dfrac{(\pi-4)u_0+4}{4} + \dfrac{\pi u_0}{32n} + \dfrac{\varepsilon}{n}} = \dfrac{-2}{1 - \dfrac{1}{8n} + \dfrac{\varepsilon}{n}}$

d'où $u_{2n} - 1 = -2(1 + \dfrac{1}{8n} + \dfrac{\varepsilon}{n})$, soit $u_{2n} + 1 = \dfrac{-1}{4n}(1+\varepsilon)$ et ainsi $\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = -1$ et $u_{2n} + 1 \backsim -\dfrac{1}{4n}$

Enfin $u_{2n+1} = \dfrac{1}{u_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}} = \dfrac{1}{-1 - \dfrac{1}{4n} + \dfrac{\varepsilon}{n} + \dfrac{1}{2n+1}}$, ce qui grâce encore à $\dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{2n} + \dfrac{\varepsilon}{n}$ (pour $n \geq 1$), s'écrit $u_{2n+1} = \dfrac{1}{-1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{\varepsilon}{n}} = -(1 + \dfrac{1}{4n} + \dfrac{\varepsilon}{n})$, d'où $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = -1$ et $u_{2n+1} + 1 \backsim -\dfrac{1}{4n} \backsim -\dfrac{1}{4n+2}$;

comme on vient de voir que $u_{2n} + 1 \backsim -\dfrac{1}{4n}$, c'est que finalement $u_n + 1 \backsim -\dfrac{1}{2n}$ ■

.