Polynômes avec fonction rationnelle transformant une racine en une autre racine.

0) Introduction

Il s'agit ici simplement de deux exercices relatifs à des polynômes pour lesquels il existe une fonction rationnelle transformant une racine en une racine.

Dans la référence 1, on verra, notamment, que sous certaines hypothèses complémentaires cette propriété permet de dire que le groupe de Galois du polynôme est résoluble et cyclique.

I) Etude de la famille de polynômes $P_a(X) = X^3 - aX^2 - (a+3)X - 1$ pour a réel

Cette famille (a est réel) est étudiée (pour $a \geq -1$) dans un document de Danile Shanks intitulé : The Simplest Cubic Fields dans Mathematics of Computation, vol 28, number 128, october 1974, pages 1137-1152.

.

1) P_a est irréductible sur $Q[X]$.

2) Le discriminant de P_a est $(a^2+3a+9)^2$ et P_a a trois racines réelles distinctesqui sont

$\frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{\delta}}{3}\cos\frac{\theta}{3},\ \frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{\delta}}{3}\cos\frac{(\theta+2\pi)}{3},\ \frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{\delta}}{3}\cos\frac{(\theta+4\pi)}{3}$

avec

$\delta = a^2+3a+9 = (a+\frac{3}{2})^2 + \frac{27}{4}$ (Shanks s'intéresse aux cas où δ est premier : $a = -1, 1, 2, 410)$ et $\theta = \arccos\frac{2a+3}{2\sqrt{\delta}}$.

Si $a = \frac{-3}{2},\ \theta = \frac{\pi}{2},\ \delta = \frac{27}{4}$ et les trois 3racines sont $-2, \frac{-1}{2}, -1$

Si $a > \frac{-3}{2},\ \theta = \arctan\frac{\sqrt{27}}{2a+3}$

Si $a < \frac{-3}{2},\ \theta = \arctan\frac{\sqrt{27}}{2a+3} + \pi$

3) $P_a(\frac{-1}{1+X}) = \frac{-P_a(X)}{(1+X)^3}$.

Si r est racine de $P_a,$ les autres racines de P_a sont $\frac{-1}{1+r}$ et $-\frac{1+r}{r}$.

Remarque 1 : le cas particulier $P_{-1}(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$ est traité sous l'aspect Galois dans l'exercice 9 de P12.5 de la référence 1.

Remarque 2 : j désignant $e^{\frac{2\pi i}{3}}$, les deux polynômes $Q_k(X) = X^3 + (1-j^k)(X^2+X) - j^k$, pour $k = 1$ et $2,$ vérifient $Q_k(\frac{-1}{1+X}) = \frac{j^k Q_k(X)}{(1+X)^3}$ et la transformation $X \mapsto \frac{-1}{1+X}$ conserve chaque racine de Q_1 et Q_2.

4) Dans l'exercice 9 de la propriété 12.5 de la référence 1, il a été trouvé que les racines de P_{-1} sont

$2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7},\ 2\cos\frac{6\pi}{7}$, cela en remarquant que

$P_{-1}(X+\frac{1}{X}) = \dfrac{X^6+X^5+X^4+X^3+X^2+X+1}{X^3}.$

On en déduit

$\frac{-1}{3}+\frac{2\sqrt{7}}{3}\cos(\frac{\arctan(\sqrt{27})}{3}) = 2\cos\frac{2\pi}{7}$: je n'ai pas de preuve de cette identité sans passer par P_{-1}.

Preuves du I :

1) P_a n'a pas de racines rationnelles (si $r = \frac{p}{q}$, avec p, q entiers premiers entre eux, est racine de P_a, nécessairement $q = \pm 1$, donc r est un entier qui doit diviser 1, or -1 et 1 ne sont pas racines de P_a) et il est de degré ≤ 3

2) Le discriminant de P_a est $D = (x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$ où les x_i sont les trois racines dans C de P_a.

On réduit P_a : $Q_a(X) = P_a(X+\frac{a}{3}) = X^3+pX+q$ avec

$p = -\frac{a^2}{3}-a-3 = -\frac{a^2+3a+9}{3}$ et $q = -\frac{2a^3}{27}-\frac{a^2}{3}-a-1 = -\frac{(2a+3)(a^2+3a+9)}{27}$.

Or le discriminant de Q_a est $-(4p^3+27q^2) = \frac{4(a^2+3a+9)^3}{27}-\frac{(2a+3)^2(a^2+3a+9)^2}{27}$,

soit $-(4p^3+27q^2) = (a^2+3a+9)^2$ puisque $4(a^2+3a+9) = (2a+3)^2+27$.

Et comme les racines de Q_a sont les translatées de celles de P_a, ces deux polynômes ont le même discriminant.

$4p^3+27q^2$ étant négatif, Q_a a trois racines réelles distinctes, donc P_a aussi.

En appliquant les formules de Viéte (voir référence 2) les racines de Q_a sont

$2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta}{3}, 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}, 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}$

avec $\theta = \arccos\dfrac{3q}{2p\sqrt{\frac{-p}{3}}}$.

Comme $\sqrt{\frac{-p}{3}} = \frac{\sqrt{\delta}}{3}$, on a $\theta = \arccos\frac{2a+3}{2\sqrt{\delta}} = \arccos\frac{2a+3}{\sqrt{(2a+3)^2+27}} \in]0;\pi[$

Précisons θ en terme d'$\arctan$.

Soit, pour $2a+3 \neq 0$, $\theta' = \arctan\frac{\sqrt{27}}{2a+3}$: $\theta' \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$.

$\cos^2\theta' = \frac{1}{1+\tan^2\theta'} = \frac{(2a+3)^2}{4\delta}$, donc $\cos\theta' = \pm\frac{2a+3}{2\sqrt{\delta}}$.

D'où,

si $2a+3 > 0$, $\theta' \in]0;\frac{\pi}{2}[$ donc $\cos\theta' = \frac{2a+3}{2\sqrt{\delta}} = \cos\theta$ et $\theta = \theta'$ car tous les deux sont dans $]0;\pi[$

si $2a+3 < 0$, $\theta' \in]-\frac{\pi}{2};0[$ donc $\cos\theta' = \frac{-(2a+3)}{2\sqrt{\delta}} = -\cos\theta$, soit $\cos\theta = \cos(\theta'+\pi)$ et $\theta = \theta'+\pi$ car tous les deux sont dans $]0;\pi[$.

3) On va montrer un peu plus que ce qui annoncé, à savoir que les seuls polynômes P unitaires à coefficients réels de degré 3 qui vérifient $P(\frac{-1}{1+X}) = \frac{-P(X)}{(1+X)^3}$ sont les polynômes P_a.

En effet si $P(X) = X^3 + uX^2 + vX + w,\ P(\frac{-1}{1+X}) = \frac{-P(X)}{(1+X)^3}$ équivaut à

$$\frac{-1 + u(1+X) - v(1+X)^2 + w(1+X)^3}{(1+X)^3} = \frac{-P(X)}{(1+X)^3}$$

D'où par identification des numérateurs, ceci équivaut à

$w = -1,\ 3w - v = -u,\ 3w - 2v + u = -v,\ w - v + u - 1 = -w$

soit $w = -1$ et $u - v = 3,$ cad $P = P_a$ avec $a = -u.$

Application : si r est racine de $P_a,$ $\frac{-1}{1+r}$ est aussi racine, donc aussi

$$\frac{-1}{1 - \frac{1}{1+r}} = -\frac{1+r}{r}.$$

On vérifie que

$$r - \frac{1}{1+r} - \frac{1+r}{r} = \frac{r^3 - 3r - 1}{r^2 + r} = \frac{ar^2 + (a+3)r + 1 - 3r - 1}{r^2 + r} = a$$

$$r \times \frac{-1}{1+r} \times \frac{-(1+r)}{r} = 1.$$

<u>Remarque</u> : cherchons les polynômes $P(X) = X^3 + uX^2 + vX + w$ tels que

$P(\frac{-1}{1+X}) = \frac{cP(X)}{(1+X)^3}$ où c est une constante autre que $-1.$

On a cette fois le systéme

$w = c,\ 3w - v = cu,\ 3w - 2v + u = cv,\ w - v + u - 1 = cw.$

Donc $(3-u)w = v,\ (3-v)w = 2v - u,\ w^2 - w + 1 = u - v.$

On en déduit $w(-u+v) = -v + u,$ soit $(v-u)(w+1) = 0.$

Comme $w = c \neq -1,$ nécessairement $u = v$ et $w^2 - w + 1 = 0,$ soit $w = -j$ ou $w = -j^2.$

Donc ici, on ne trouve pas une infinité de polynômes, mais deux polynômes.

Si $w = -j,$ de $(3-u)(-j) = u$ on tire $u = \frac{-3j}{1-j} = 1 - j$ et alors

$P(X) = X^3 + (1-j)(X^2 + X) - j$ dont les racines sont j (double) et j^2 (simple).

On vérifie alors effectivement que $\frac{-1}{1+j}$ est encore racine de $P,$ puisque c'est j et $\frac{-1}{1+j^2}$ est aussi racine de P puisque c'est j^2.

Si $w = -j^2,$ on trouve $u = \frac{-3j^2}{1-j^2} = 1 - j^2$ et alors $P(X) = X^3 + (1-j^2)(X^2 + X) - j^2$ dont les racines sont j (simple) et j^2 (double).

Et là encore la transformation $X \mapsto \frac{-1}{1+X}$ conserve chaque racine.

4) Les racines de P_{-1} sont d'après l'exercice 9 de la propriété 12.5 de la référence 1 :

$2\cos\frac{2\pi}{7}, 2\cos\frac{4\pi}{7},\ 2\cos\frac{6\pi}{7},$ donc la seule racine positive est évidemment $2\cos\frac{2\pi}{7}.$

Mais d'après le 2) ci-dessus (méthode de Viéte) ces racines sont :

$$\frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{\delta}}{3}\cos\frac{\theta}{3},\ \frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{\delta}}{3}\cos\frac{(\theta + 2\pi)}{3},\ \frac{a}{3} + \frac{2\sqrt{\delta}}{3}\cos\frac{(\theta + 4\pi)}{3},$$

avec $a = -1,\ \delta = 7,\ \theta = \arccos\frac{2a+3}{2\sqrt{\delta}} = \arccos\frac{1}{2\sqrt{7}} = \arctan\sqrt{27}$ (car on est dans le cas $2a + 3 > 0$).

Ce qui donne comme racines de P_{-1}

$$\frac{-1}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\frac{\theta}{3},\ \frac{-1}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\frac{(\theta + 2\pi)}{3},\ \frac{-1}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\frac{(\theta + 4\pi)}{3}$$

Or $\cos(\frac{\arctan(\sqrt{27})}{3}) \approx 0.89595$ et $\frac{-1}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\frac{\arctan(\sqrt{27})}{3} \approx 1.2470$ donc c'est la seule racine positive de P_{-1} et ainsi
$\frac{-1}{3} + \frac{2\sqrt{7}}{3}\cos\frac{\arctan(\sqrt{27})}{3} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$.

II) $\boxed{\text{Sur } P(X) = X^8 - 8X^6 + 20X^4 - 16X^2 - X + 2}$

J'ai trouvé cet exercice fin 2016 sur un forum : la question 5 a soulevé beaucoup de problèmes, certains jugeant, à tort, l'énoncé incomplet et la nécessité de faire appel à Galois pour pouvoir conclure.

1) Déterminer les racines rationnelles de P et factoriser P dans $Q[X]$ en un produit de deux facteurs unitaires dont l'un n'a aucune racine rationnelle : ce facteur sera noté T.

2) On pose $R(X) = X^2 - 2$ et $R_2(X) = R(R(X)), R_3(X) = R(R(R(X)))$.
Montrer que

2.1) $P(X) = 0 \Leftrightarrow R_3(X) = X$

2.2) $P'(X) = 8XR(X)R_2(X) - 1$

2.3) Si r est racine de P, alors $P'(R(r)) = P'(r)$.

3) Montrer que si r est une racine de P, $R(r)$ est aussi racine de P et que si r est simple, $R(r)$ aussi.
Dans quels cas $R(r) = r$?

4) Soit a une racine (dans C) de T : montrer que $a, R(a), R_2(a)$ sont trois racines distinctes simples de$T$.

5)

5.1) Montrer que T a six racines distinctes de la forme $a, R(a), R_2(a),\ b, R(b), R_2(b)$ et que $(P'(a)+1)(P'(b)+1) = -64$.

On pose $U(X) = (X-a)(X-R(a))(X-R_2(a))$ et $V(X) = (X-b)(X-R(b))(X-R_2(b))$.

5.2) Vérifier que R conserve globalement les racines de U et conserve globalement les racines de V.

5.3) Montrer que l'expression $r + R(r) + R_2(r)$ ne prend que deux valeurs lorsque r décrit les racines de T.

5.4) Déterminer la décomposition en facteurs irréductibles dans $Q[X]$ de T.

6) Montrer que pour tout θ réel, $R(2\cos\theta) = 2\cos(2\theta)$; en déduire toutes les racines de P et on précisera les racines de chacun des deux facteurs irréductibles de T.

7) Trouver un point commun entre cet exercice et celui du I.

<u>Preuves du II</u> :

1) Si une racine de P est de la forme $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers premiers entre eux, alors $p^8 - 8p^7q + 20p^4q^4 - 16p^2q^5 - pq^6 + 2q^7 = 0$: donc q divise p^8 donc divise p donc $q = \pm 1$ et p doit diviser alors 2, donc la seule possibilité de racine rationnelle est $\frac{p}{q} = \pm 1$ ou ± 2.
On vérifie alors que seules -1 et 2 sont les racines rationnelles de P.
Donc $P(X) = (X+1)(X-2)T(X) = (X^2 - X - 2)T(X)$, le polynôme T s'obtenant par division euclidienne : $T(X) = X^6 + X^5 - 5X^4 - 3X^3 + 7X^2 + X - 1$.
Remarquons que T n'ayant pas de racine rationnelle, -1 et 2 sont racines simples de P.

2)

2.1) $R_2(X) = R(R(X)) = (R(X))^2 - 2 = X^4 - 4X^2 + 2$
$R_3(X) = R(R_2(X)) = (X^4 - 4X^2 + 2)^2 - 2 = P(X) + X,$
donc $P(X) = R_3(X) - X$ et $P(X) = 0 \Leftrightarrow R_3(X) = X.$
2.2) $P'(X) = R_3'(X) - 1$
et $R_3'(X) = R'(R_2(X))R_2'(X) = 2R_2(X)R'(R(X))R'(X) = 2R_2(X) \times 2R(X) \times 2X = 8XR(X)R_2(X),$
soit $P'(X) = 8XR(X)R_2(X) - 1.$
2.3) De 2.1) et 2.2) on déduit $P'(R(r)) = 8R(r)R_2(r)R_3(r) - 1 = 8R(r)R_2(r)r - 1 = P'(r).$

3)

Soit r une racine de P : $P(R(r)) = R_3(R(r)) - R(r) = R(R_3(r)) - R(r),$ puisque $RoR_3 = R_3oR = R_4,$
et ainsi $P(R(r)) = R(r) - R(r) = 0$ et $R(r)$ est aussi racine de P.
Si r est simple alors $P'(r) \neq 0$ et comme (voir 2.3) $P'(R(r)) = P'(r),$ $R(r)$ est aussi racine simple.
$R(r) = r \Leftrightarrow r^2 - r - 2 = 0$ soit $r = -1$ ou $r = 2$: seules les racines rationnelles,-1 et $2,$ de P sont conservées par R.

4)

Notons que a n'est ni $-1,$ ni 2 puisque a est racine de T.
D'après 3), $R(a)$ et $R_2(a) = R(R(a))$ sont aussi racines de P.
Elles sont distinctes, car $a = R(a)$ est exclu d'après le 3), $a = R_2(a)$ implique (par composition par R) $R(a) = R_3(a),$ soit (d'après le 2.1)) $R(a) = a$ donc cas exclu aussi, et $R(a) = R_2(a)$ est auss exclu car il implique (par composition par R_2) $R_3(a) = R(R_3(a))$ soit encore $a = R(a)$.
Reste à voir qu'elles sont racines de $T,$ cad qu'elles sont distinctes de -1 et 2.
Pour a c'est acquis par hypothése ;
$R(a) = -1 \Leftrightarrow a^2 = 1$ ce qui est impossible car $a \neq -1$ et aussi $a \neq 1$ car 1 pas racine de T (puisque pas racine de P)
$R(a) = 2 \Leftrightarrow a^2 = 4$ ce qui est impossible car $a \neq 2$ et aussi $a \neq -2$ car -2 pas racine de T (puisque pas racine de P)
$R_2(a) = -1 \Leftrightarrow R_3(a) = R(-1) \Leftrightarrow a = -1$, ce qui est exclu
$R_2(a) = 2 \Leftrightarrow R_3(a) = R(2) \Leftrightarrow a = 2$, ce qui est exclu.
Donc $a, R(a), R_2(a)$ sont trois racines distinctes de T.
Montrons qu'elles sont simples.
Si aucune n'est simple c'est que $T(X) = (X-a)^2(X-R(a))^2(X-R_2(a))^2$ et $T(X) = (X^3 + uX^2 + vX + w)^2.$
Or $T(X) = X^6 + X^5 - 5X^4 - 3X^3 + 7X^2 + X - 1,$ d'où par identification des termes en $X^5,$ en $X^2,$ en X et du terme constant, on obtient
$2u = 1,\ v^2 + 2uw = 7,\ 2vw = 1,\ w^2 = -1$, soit $v^2 = -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4} + w = 7$ ce qui est contradictoire avec $w^2 = -1.$
Donc au moins une des trois racines $a, R(a), R_2(a)$ de T est simple : mais d'après le 3), R conserve la simplicité d'une racine de P, donc ces trois racines sont simples $(R(R(a)) = R_2(a),\ R(R_2(a)) = R_3(a) = a).$

5)

5.1) Soit a une racine de T : d'après le 4), $a, R(a), R_2(a)$ sont trois racines distinctes et

simples de T.
T étant de degré 6, il existe une racine b de T qui soit distinctes des trois précédentes et d'après le 4), $b, R(b), R_2(b)$ sont trois racines distinctes et simples de T.
b a été choisi en dehors de $E = \{a; R(a); R_2(a)\}$: mais est-ce le cas de $R(b)$ et $R_2(b)$?
Notons que E est invariant par $R,$ puisque $R_3(a) = a$.
Donc si $R(b) \in E,$ par composition par $R_2,$ b est dans $E,$ ce qui est exclu, de même si $R_2(b) \in E,$ par composition par $R,$ b est dans $E,$ ce qui est exclu, donc $a, R(a), R_2(a), b, R(b), R_2(b)$ sont six racines distinctes de $T,$ donc ce sont les six racines de T.
D'après le 2.2), $P'(a) = 8aR(a)R_2(a) - 1$ et $P'(b) = 8bR(b)R_2(b) - 1$; donc $\dfrac{(P'(a)+1)(P'(b)+1)}{64}$ est le produit des six racines de $T,$ et vu le terme constant de T est $-1,$ c'est que $(P'(a)+1)(P'(b)+1) = -64$.
5.2) Evident : par exemple les racines de $U,$ à savoir $a, R(a), R_2(a)$ sont respectivement transformées par R en $R(a), R_2(a), R_3(a) = a$.
5.3) Pour toute r une racine de T on pose
$s(r) = r + R(r) + R_2(r) = r + r^2 - 2 + r^4 - 4r^2 + 2 = r^4 - 3r^2 + r.$
D'après le 5.2), pour tout $r \in \{a; R(a); R_2(a)\},$ $s(r)$ est invariant donc $s(r)$ prend une seule valeur notée $m,$ à priori dans C.
De même pour tout $r \in \{b; R(b); R_2(b)\},$ $s(r)$ est invariant donc $s(r)$ prend une seule valeur notée $n,$ à priori dans C.
Notons, à ce niveau que $m+n$ étant la somme des racines de $T,$ $m+n = -1$.
Considérons $S(X) = (X^4 - 3X^2 + X - m)(X^4 - 3X^2 + X - n)$: les six racines de T sont donc racines de S et donc T divise S (du moins dans $C[X]$).
Donc il existe β et γ tels que
$X^8 - 6X^6 + 2X^5 + (9 - (m+n))X^4 - 6X^3 + (1 + 3(m+n))X^2 - (m+n)X + mn$
$= (X^6 + X^5 - 5X^4 - 3X^3 + 7X^2 + X - 1)(X^2 + \beta X + \gamma),$ ce qui donne
$1 + \beta = 0,\ -5 + \beta + \gamma = -6,\ 7 - 3\beta - 5\gamma = 9 - (m+n),\ -\gamma = mn.$
Donc $\beta = -1,$ $\gamma = 0$ et $m+n = -1$ (ce que l'on avait déjà vu) et $mn = 0$.
Ainsi $\{m; n\} = \{-1; 0\}$ et donc

$\boxed{\text{pour toute racine } r \text{ de } T,\ s(r) = r + R(r) + R_2(r) \text{ est égal à } -1 \text{ ou } 0.}$

5.4) D'après ce qui précéde, T se factorise en un produit de deux facteurs unitaires du troisième degré, l'un des facteurs ayant pour somme de ses racines 0 que l'on notera U et l'autre ayant pour somme de ses racines -1 que l'on notera V.
Donc $T(X) = U(X)V(X)$ avec $U(X) = X^3 + sX + t$ et $V(X) = X^3 + X^2 + s'X + t'$ et par identification on obtient le systéme
$s + s' = -5, s + t + t' = -3, ss' + t = 7, st' + s't = 1, tt' = -1.$
D'où $s' = -s - 5,$ $t' = -3 - s - t,$ puis
$s(-s-5) + t = 7,$ $s(-3 - s - t) + (-s-5)t = 1,$ lesquelles donnent
$t = s^2 + 5s + 7$ et $s^2 + 3s + 5t + 2st + 1 = 0$ et finalement
$2s^3 + 16s^2 + 42s + 36 = 0,$ soit $(s+3)^2(s+2) = 0$.
Donc, à priori, il y a deux possibilités pour s. Mais si $s = -2,$ alors $s' = -3, t = 1$ et $U(X) = X^3 - 2X + 1$ qui a pour racine 1 qui n'est pas racine de T, donc la seule possibilité est en fait $s = -3$ qui donne $s' = -2, t = 1,$ $t' = -1$ et ainsi $U(X) = X^3 - 3X + 1$ et $V(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$.
U et V n'ont pas de racine rationnelle, T en n'ayant pas, donc ils sont de degré 3, ils sont irréductibles : la décompostion en facteurs irréductibles sur $Q[X]$ de T est donc

$\boxed{T(X) = (X^3-3X+1)(X^3+X^2-2X-1).}$

6) $R(2\cos\theta) = 4\cos^2\theta - 2 = 4\dfrac{\cos(2\theta)+1}{2} - 2 = 2\cos(2\theta)$ et donc
$R_2(2\cos\theta) = R(2\cos(2\theta)) \;= 2\cos(4\theta)$; de même $R_3(2\cos\theta) = 2\cos(8\theta)$.
Or $P(2\cos\theta) = 0 \Leftrightarrow R_3(2\cos\theta) = 2\cos\theta,$ d'après 2.1) ; et donc
$P(2\cos\theta) = 0 \Longleftrightarrow \cos(8\theta) = \cos\theta$.
On va voir que cela permet d'obtenir huit racines de $P,$ donc toutes les racines de $P,$ lesquelles sont donc toutes en fait de la forme $2\cos\theta$.
En effet,
$\cos(8\theta) = \cos\theta \Leftrightarrow 8\theta = \theta + 2k\pi$ ou $8\theta = -\theta + 2k\pi$
$\Leftrightarrow \theta = \dfrac{2k\pi}{7}$ (cas 1) ou $\theta = \dfrac{2k\pi}{9}$ (cas 2).
Le cas 1 donne 7 points ($k = 0,1,\ldots,6$) sur le cercle trigonométrique : $\theta = 0$ et six autres ayant le même cosinus 2 à 2
$\dfrac{2\pi}{7}$ et $\dfrac{12\pi}{7} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{7}$, $\dfrac{4\pi}{7}$ et $\dfrac{10\pi}{7} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{7}$, $\dfrac{2\pi}{7}$ et $\dfrac{12\pi}{7} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{7}$, ce qui donne 4 racines distinctes de P :
$2, 2\cos\dfrac{2\pi}{7}, 2\cos\dfrac{4\pi}{7}, 2\cos\dfrac{8\pi}{7}$.
Le cas 2 donne 9 points ($k = 0,1,\ldots,7$) sur le cercle trigonométrique : $\theta = 0$ et huit autres ayant le même cosinus 2 à 2
$\dfrac{2\pi}{9}$ et $\dfrac{16\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{9}$, $\dfrac{4\pi}{9}$ et $\dfrac{14\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{4\pi}{9}$, $\dfrac{6\pi}{9}$ et $\dfrac{12\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{6\pi}{9}$ (le cosinus est $\dfrac{-1}{2}$), $\dfrac{8\pi}{9}$ et $\dfrac{10\pi}{9} = 2\pi - \dfrac{8\pi}{9}$ ce qui donne 4 nouvelles racines distinctes de P :
$-1, 2\cos\dfrac{2\pi}{9}, 2\cos\dfrac{4\pi}{9}, 2\cos\dfrac{8\pi}{9}$.
On obtient donc huit racines de $P,$ donc toutes les racines de P :
-1 et 2 qui sont les deux racines rationnelles de P
et les six racines de T : $2\cos\dfrac{2\pi}{7}, 2\cos\dfrac{4\pi}{7}, 2\cos\dfrac{8\pi}{7}, 2\cos\dfrac{2\pi}{9}, 2\cos\dfrac{4\pi}{9}, 2\cos\dfrac{8\pi}{9}$.
En fait puisque $R(2\cos\theta) = 2\cos(2\theta)$ les six racines de T sont
$2\cos\dfrac{2\pi}{7}, R(2\cos\dfrac{2\pi}{7}), R_2(2\cos\dfrac{2\pi}{7}), 2\cos\dfrac{2\pi}{9}, R(2\cos\dfrac{2\pi}{9}), R_2(2\cos\dfrac{2\pi}{9})$: on retrouve le 5.1.
Reste à préciser quelles sont celles qui sont racines de $U(X) = X^3 - 3X + 1$ et celles racines de $U(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$ (définis au 5.4 par le fait que les racines de U sont de la forme $a, R(a), R_2(a)$ et sont de somme $0,$ alors que V a ses racines de la forme $b, R(b), R_2(b)$ mais elles sont de somme -1).
En fait si $\theta = \dfrac{2\pi}{9}$ ou $\dfrac{4\pi}{9}$ ou $\dfrac{8\pi}{9}$ on a $\cos(3\theta) = \dfrac{-1}{2}$, donc $4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \dfrac{-1}{2}$, soit
$(2\cos\theta)^3 - 3(2\cos(\theta))\theta + 1 = 0$:
les racines de $U(X) = X^3 - 3X + 1$ sont donc $2\cos\dfrac{2\pi}{9}, 2\cos\dfrac{4\pi}{9}, 2\cos\dfrac{8\pi}{9}$, ce qui implique que celles de $U(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$ sont $2\cos\dfrac{2\pi}{7}, 2\cos\dfrac{4\pi}{7}, 2\cos\dfrac{8\pi}{7}$.

Remarque 1 : $\cos\dfrac{8\pi}{7} = \cos\dfrac{6\pi}{7}$

Remarque 2 : des termes constants de U et V on déduit que
$\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{8\pi}{9} = \dfrac{-1}{8}$ et $\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}\cos\dfrac{8\pi}{7} = \dfrac{1}{8}$.

Remarque 3 : dans l'exercice 8 de P12.5 de la référence 1 on montre que le polynôme $X^5 + X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 3X + 1$ a pour racines $2\cos(\dfrac{2k\pi}{11})$ pour $k = 1,2,3,4,5,$ cela à partir du fait que si on remplace X par $X + \dfrac{1}{X}$ ce polynôme devient $\dfrac{X^{10} + X^9 + \ldots + X + 1}{X^5}$ (même idée que celle donnée au 4) du I).

7) Le facteur irréductible $U(X) = X^3 + X^2 - 2X - 1$ de P est un des polynômes de la famille de polynômes P_a étudiée au I : $U(X) = P_{-1}(X)$.

Au 2) et 4) du I on a donné deux méthodes directes pour calculer les racines de P_{-1}(dont celle de Viéte).

Références

Référence 1 : http://alain.pichereau.pagesperso-orange.fr/equation7.pdf, paragraphe 12, propriétés 12.4, 12.5, 12.6.

Référence 2 : http://alain.pichereau.pagesperso-orange.fr/equation45.pdf