<- Sommaire Site AP

Annexe 3

1) Un rappel préliminaire sur les formules de Newton.
2) Réduction de toute équation du 4ième degré à une équation sans termes de degré 3 et 2.
3) Réduction de toute équation du 4ième degré à une équation bicarrée.

NOTA : tous les polynômes (ou équations polynômiales) considérés ici ayant leurs coefficients dans C, dès qu'on parlera de leurs racines, il s'agira de leurs racines dans C

1) Rappel sur les formules de Newton

Soient x_0,x_1,x_2,x_3 les racines de l'équation $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, les a_i étant dans un corps $K\subset C$,
on pose $S_{x,k}=x_0^k+x_1^k+x_2^k+x_3^k$
on a alors :

$S_{x,1}=-a_3$
$S_{x,2}=a_3^2-2a_2$
d'après $(\Sigma_{i=0;3}\, u_i)^2=\Sigma_{i=0;3}\, u_i^2+2\Sigma_{j>i}\, u_iu_j$
$S_{x,3}=-a_3^3+3a_2a_3-3a_1$
d'après (par exemple, par un calcul direct) :
$(\Sigma_{i=0;3}\, u_i)^3=\Sigma_{i=0;3}\, u_i^3+3\Sigma_{i\neq j}\, u_i^2u_j+6\Sigma_{k>j>i}\, u_iu_ju_k$
ce qui donne $S_{x,1}^3=S_{x,3}+3(S_{x,1}S_{x,2}-S_{x,3})-6a_1$
$S_{x,4}=a_3^4-4a_2a_3^2+2a_2^2+4a_1a_3-4a_0$
d'après $S_{x,4}+a_3S_{x,3}+a_2S_{x,2}+a_1S_{x,1}+4a_0=0$, obtenu en remplacant dans l'équation (1) x successivement par les racines de (1) et on ajoute membre à membre les cinq égalités obtenues.
$S_{x,4+p}+a_3S_{x,3+p}+a_2S_{x,2+p}+a_1S_{x,1+p}+a_0S_{x,p}=0$ pour tout entier naturel p non nul.
on multiplie l'équation (1) par x^p et on y remplace successivement x par les racines de (1) et on ajoute membre à membre les cinq égalités obtenues.

Tous ces $S_{x,k}$ sont donc dans K.
Bien entendu, $S_{x,2k}$ ne peut être nul que si au moins une des racines x_i est non réelle.

2) Réduction de l'équation (1) $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, les coefficients a_i étant dans un corps $K\subset C$,
à l'équation (3) $z^4+q'z+r'=0$, q' et r' étant dans K(d), avec d^2 dans K (donc K(d) est une extension par radicaux de K).
Les solutions de (1) s'obtiennent à partir des quatre solutions de (3) et par résolution de quatre équations du second degré (elles seront précisées ci-dessous).

Preuve :

Evidemment en posant $x=y-a_3/4$,

l'équation (1) $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

se ramène de façon immédiate à

l'équation (2) $y^4+py^2+qy+r=0$, p,q,r étant encore dans K.

Pour se ramener ensuite à

l'équation (3) $z^4+q'z+r'=0$, q' et r' étant dans une extension par radicaux de K

on va utiliser la même idée que celle de la 2ième méthode de l'annexe 2, c'est-à-dire la méthode de Tschirnhaus via les sommes de Newton.
Soient y_0,y_1,y_2,y_3 les racines de l'équation (2).
En posant, cette fois, $S_{y,k}=y_0^k+y_1^k+y_2^k+y_3^k$
on a $S_{y,1}=0$, les autres $S_{y,i}$ étant bien sûr dans K, en particulier $S_{y,2}=-2p$, $S_{y,3}=-3q$, $S_{y,4}=2p^2-4r$ (voir rappel sur Newton).
Si p=0 l'équation (2) a la forme voulue (3) avec q'=q, r'=r (qui sont dans K=K(d) avec d=1).
On se place maintenant dans le cas $p\neq 0$.

On pose, pour i=0,1,2,3, $z_i=y_i^2+uy_i+v$ et on cherche u et v de façon que z_0,z_1,z_2,z_3 soient solutions de l'équation (3) $z^4+q'z+r'=0$.

Pour cela, il faut et il suffit (voir le rappel sur Newton qui montre que $S_{x,1}=S_{x,2}=0$ équivaut à $a_3=a_2=0$) que $S_{z,1}=S_{z,2}=0$;
or $S_{z,1}=S_{y,2}+uS_{y,1}+4v$ et $S_{z,2}=S_{y,4}+2uS_{y,3}+(u^2+2v)S_{y,2}+2uvS_{y,1}+4v^2$.
Comme $S_{y,1}=0$ on a tout de suite
$v=-S_{y,2}/4$ et u est solution de l'équation du second degré $S_{y,2}u^2+2S_{y,3}u-S_{y,2}^2/4+S_{y,4}=0$, soit

$v=p/2$ et
u est solution de l'équation du second degré $-2pu^2-6qu+p^2-4r=0$

Soit d une racine 2ième (elle peut être imaginaire) de son discriminant : on peut prendre $u=(6q+d)/(-4p)$ et ainsi u et v sont dans K(d) qui est une extension par radicaux de K (voir chapitre 7).

Donc pour u et v ainsi déterminés, z_0,z_1,z_2,z_3 sont racines de l'équation (3) $z^4+q'z+r'=0$

avec $q'=-S_{z,3}/3$ et $r'=-S_{z,4}/4$ (puisque $S_{z,1}=S_{z,2}=0$ et voir rappel sur Newton).

Mais $z_i=y_i^2+uy_i+v$, donc les deux sommes $S_{z,3}$ et $S_{z,3}$ sont des polynômes en $S_{y,k}$ (qui sont dans K) et u et v : donc q' et r' sont bien dans K(d).
Précisons :
$S_{z,3}= S_{y,6}+3uS_{y,5}+3(u^2+v)S_{y,4}+(u^3+6uv)S_{y,3}+3(u^2v+v^2)S_{y,2}+3uv^2S_{y,1}+4v^3$
$S_{z,4}= S_{y,8}+4uS_{y,7}+(6u^2+4v)S_{y,6}+(4u^3+12uv)S_{y,5}+(u^4+12u^2v+6v^2)S_{y,4}+$
$(4u^3v+12uv^2)S_{y,3}+(6u^2v^2+4v^3)S_{y,2} +4uv^3S_{y,1}+4v^4$

Attention : le fait que l'équation (2) se ramène à l'équation (3), ne signifie pas que ces équations soient équivalentes (cad ont les mêmes solutions), mais que la résolution de (3) permet la résolution de (2), et donc celle de (1) :
en effet ayant les z_i par résolution de l'équation (3), on obtient les solutions de (2) par résolution des quatres équations du second degré $z_i=y^2+uy+v$; bien entendu chacune de ces équations peut donner deux valeurs pour y : il faut alors tester laquelle est effectivement solution de (2).

Remarque :
J'ai essayé vainement de ramener l'équation (3) à l'équation (4) $t^4+k=0$:
en posant $t_i=z_i^3+uz_i^2+vz_i+w$ et en cherchant cette fois u,v,w (toujours dans une extension par radicaux de K) tels que $S_{t,1}=S_{t,2}=S_{t,3}=0$.
Compte-tenu que $S_{z,1}=S_{z,2}=0$, la condition $S_{t,1}=0$ donne $w=-S_{z,3}/4$.
La condition $S_{t,2}=0$ donne une équation de degré 2 en u et de degré 1 en v : on en déduit v=f(u), expression rationnelle en u.
La condition $S_{t,3}=0$ donne une autre équation de degré 3 en u et en v : en y remplacant v par f(u) on obtient une équation de degré 6 en u, équation qui n'est pas forcément résoluble par radicaux (voir chapitre 7)...

Un exemple de réduction

Je pars directement d'une équation du type (2) : $y^4-8y^2+8y+15=0$. Ici K=Q.
Donc p=-8, q=8, r=15, et en appliquant ce qui précéde on obtient :
$v=-8/2=-4$ et u est racine de $-2\times(-8)u^2-6\times8u+(-8)^2-4\times15=0$, soit $4u^2-12u+1=0$.
On peut prendre $u=3/2+\sqrt{2}$.
Pour obtenir l'équation (3) il faut déterminer q' et r' : d'après le rappel sur Newton, on a successivement
$S_{y,1}=0$
$S_{y,2}=0^2-2\times(-8)=16$
$S_{y,3}=-3\times8=-24$
$S_{y,4}=2\times8^2-4\times15=68$
$S_{y,5}=8\times(-24)-8\times16=-320$
$S_{y,6}=8\times68-8\times(-24)-15\times16=496$
$S_{y,7}=8\times(-320)-8\times68-15\times(-24)=-2744$
$S_{y,8}=8\times496-8\times(-320)-15\times68=5508$
Et en utilisant les formules de la fin de la démonstration ci-dessus, on obtient
$S_{z,3}=-630-558\sqrt{2}$, donc $q'=(630+558\sqrt{2})/3$ et $S_{z,4}=-10559/4-2586\sqrt{2}$, donc $r'=(10559/4+2586\sqrt{2})/4$.

Finalement l'équation (3) est $z^4+6(35+31\sqrt{2})z+10559/16+1293\sqrt{2}/2=0$!

Ses coefficients sont bien dans une extension par radicaux de Q : $Q(\sqrt{2})$.
Cette équation (3), malgré l'absence de terme en z^3 et z^2 n'est pas du tout évidente à résoudre : elle n'a pas de solution "évidente" et donc la seule façon de la résoudre est la méthode de Ferrari ou Descartes (voir chapitre 6), mais j'ai bien peur que l'équation du 3ième degré correspondante soit inextricable...!
Donc autant appliquer tout de suite à (2) la méthode de Ferrari ou de Descartes.
En fait l'équation (2) est immédiate à résoudre car elle, elle a deux racines évidentes (pour trouver ces solutions évidentes on cherche s'il y a des racines rationnelles en utilisant la méthode décrite dans l'encadré Conseil pratique du chapitre 5).
Vérifions cependant qu'à partir d'une solution de (3), $-9/2-\sqrt{2}$ par exemple (obtenue à partir de $z_i=y_i^2+uy_i+v$ et en choisissant une racine y_i de l'équation (2) : c'est vrai, c'est de la triche!), on peut retrouver une solution de (2), selon la méthode indiquée ci-dessus :
il faut résoudre $y^2+(3/2+\sqrt{2})y-4=-9/2-\sqrt{2}$, soit $y^2+(3/2+\sqrt{2})y+1/2+\sqrt{2}=0$: -1 est une solution évidente et donc $-1/2-\sqrt{2}$ est l'autre solution, et parmi ces deux solutions, seule -1 est effectivement solution de l'équation (2) de départ.

Une conclusion du 2)

L'exemple précédent montre que cette réduction d'une équation du 4ième degré à la forme $z^4+q'z+r'=0$ ne présente pas d'intérêt pratique pour résoudre l'équation de départ : on complique plutôt les choses.
Cependant le principe de cette réduction appliqué au 5ième degré va s'avérer utile d'un point de vue théorique : voir annexe 4.

3) Réduction de l'équation (1) $x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, les coefficients a_i étant dans un corps $K\subset C$, à une équation bicarrée dont les coefficients sont dans une extension par radicaux de K.
Pour cela, il faut résoudre (sauf cas particuliers) une équation du 3ième degré et les solutions de (1) s'obtiennent à partir des quatre solutions de l'équation bicarrée et par résolution de quatre équations du second degré.

Preuve :

Comme pour la première réduction on ramène d'abord l'équation (1) à

l'équation (2) $y^4+py^2+qy+r=0$.

Si q=0 alors l'équation (2) a en fait la forme bicarrée souhaitée (avec p''=p et r''=r) et le travail est terminé.

On se place donc maintenant dans le cas $q\neq 0$

Les x_i étant toujours les solutions de l'équation (1) et les y_i les solutions de l'équation (2), on pose, pour i=0,1,2,3, $z_i=y_i^2+uy_i+v$ et on cherche u et v de façon que z_0,z_1,z_2,z_3 soient solutions de l'équation (4) $z^4+p''z^2+r''=0$.

Pour cela, il faut et il suffit (voir le rappel sur Newton qui montre que $S_{x,1}=S_{x,3}=0$ équivaut à $a_3=a_1=0$) que $S_{z,1}=S_{z,3}=0$;
Or $S_{z,1}=S_{y,2}+uS_{y,1}+4v$ et
$S_{z,3}= S_{y,6}+3uS_{y,5}+3(u^2+v)S_{y,4}+(u^3+6uv)S_{y,3}+3(u^2v+v^2)S_{y,2}+3uv^2S_{y,1}+4v^3$ (ce calcul a déjà été fait au 1)).
Comme $S_{y,1}=0$ on a $v=-S_{y,2}/4$ (comme pour le 1)) ; en reportant cette valeur dans la condition $S_{z,3}=0$, on constate que u est solution cette fois d'une "jolie" équation de degré 3, le coefficient de u^3 étant $S_{y,3}=-3q$ (qui a été supposé non nul), et u s'obtient par radicaux (je n'irai pas plus loin dans les calculs généraux...).
u et v étant ainsi déterminé par radicaux, reste à trouver p'' et r'' : $p''=-S_{z,2}/2$ et $r''=(2p''^2-S_{z,4})/4$ (voir rappel sur Newton), et donc ils s'obtiennent aussi par radicaux, car $S_{z,2}$ et $S_{z,4}$ sont des polynômes en $S_{y,k}$ (qui sont dans K) et en u et v.
Ceci prouve le résultat annoncé.

Remarque :
Si on essaye de passer directement de la forme (1) à la forme bicarrée par le changement de variable $z_i=x_i^2+ux_i+v$, cette fois $S_{x,1}$ ne sera pas forcément nul et à mon avis on ne pourra affirmer que l'équation en u obtenue après avoir reporté $v=-S_{x,2}/4-uS_{x,1}/4$ (donné par $S_{z,1}=0$) dans la condition $S_{z,3}=0$ est vraiment de degré 3.
En effet le coefficient de u^3 dans cette équation est :
$S_{x,3}+3S_{x,2}(-S_{x,1})/4+3S_{x,1}S_{x,1}^2/16+4(-S_{x,1}^3)/64=S_{x,3}-(3/4)S_{x,2}S_{x,1}+(1/8)S_{x,1}^3$.
Donc il n'est pas évident de justifier que ce coefficient n'est jamais nul! Et même, pourquoi les coefficients de u^3, de u^2, de u, ne seraient pas simultanément nuls et le terme constant non nul, auquel cas cette équation en u n'aurait pas de solution et donc la réduction à la forme bicarrée serait impossible par cette méthode.
Le passage direct de (1) à (3) me semble donc sujet à caution.
Voir d'ailleurs la remarque 2 à la fin du 1) du chapitre 8 où pour la réduction d'une équation du 5ième degré on rencontre une situation un peu analogue : je donne alors un exemple pour lequel la réduction est effectivement impossible.

Une conclusion du 3)

Comme avec les méthodes de Ferrari et Descartes, pour résoudre une équation de degré 4 à l'aide de sa réduction à la forme bicarrée, il faut d'abord résoudre une équation de degré 3 (pour obtenir u et v) ; mais ici l'équation de degré 3 est loin d'être commode à déterminer ; passons sur sa résolution.
Mais il reste en plus, u et v étant obtenus, à calculer p'' et r'' pour arriver à la bicarrée....
Bref, il n'y a pas photo avec les méthodes de Ferrari ou Descartes. En tout cas cela ne m'a pas donné l'envie de me lancer dans un exemple.