<- Sommaire Site AP

Annexe 2

Résolution de l'équation (E) du 3ième degré $X^3+pX+q=0$ (p et q dans C) par la méthode de Tschirnhaus (en 1683, postérieure à la méthode de Hudde et aux formules de Cardan) ; la méthode est très calculatoire.

Et lien avec la méthode de l'annexe 1

Il s'agit de se ramener à une équation de la forme $y^3+k=0$, cela en utilisant les opérations algèbriques habituelles (+,-,×,/) et les racines carrées ; il y a deux façons de procéder, soit avec les résultants, soit avec les sommes de Newton.

Dans tout ce qui suit on supposera p non nul, sinon le problème est résolu d'entrée!

1ère façon : Tschirnhaus et les résultants

(d'après un énoncé d'exercice du livre de Jean-Pierre Escofier, Théorie de Galois).

Résoudre l'équation (E) $X^3+pX+q=0$ c'est évidemment chercher les racines du polynômes $P(X)=X^3+pX+q$; soit x_0 une de ses racines dans C, $T(X)=X^2+bX+c$ (b et c sont pour l'instant deux nombres complexes arbitraires), $y_0=T(x_0)$.

L'idée est de trouver une équation du 3ième degré de la forme $y^3+k=0$ dont y_0 sera solution, ainsi on aura y_0, puis x_0 par résolution de l'équation du 2ième degré $T(x_0)=y_0$; en fait on pourra éviter de résoudre cette équation.

L' idée de poser $y=T(x)$, avec T polynôme du 2ième degré est attribuée à Tschirnhaus ; cependant, la notion de résultant est postérieure à Tschirnhaus.

1ère étape : on cherche un polynôme R du 1er degré ayant aussi comme racine x_0

Il suffit de prendre pour R le reste de la division de P(X) par $T(X)-T(x_0)=T(X)-y_0$, puisque si Q est le quotient on aura $P(X)=Q(X)(T(X)-y_0)+R(X)$ et donc $0=P(x_0)=R(x_0)$.

En posant la division on trouve que

le quotient est $Q(X)=X-b$ et le reste $R(X)=(p-c+b^2+y_0)X+q+bc-by_0$

Le lecteur peut vérifier qu'effectivement $R(x_0)=0$.

On notera que R ayant une racine (commune avec P), R ne peut être une constante non nulle ; par contre il peut être le polynôme nul : voir remarque 1.

2ième étape : on cherche le résultant de P(X) et $T(X)-y_0$: il doit être nul puisque ces deux polynômes ont x_0 comme racine commune (voir chapitre 3).

Une propriété des résultants permet d'écrire

$Rés(P(X),T(X)-y_0)=(-1)^{3\times 2}Rés(T(X)-y_0,R(X))=Rés(R(X),T(X)-y_0)$.

Puisque $T(X)-y_0=X^2+bX+c-y_0$ et en notant $R(X)=uX+v$, ce résultant est le déterminant 3×3 ci-dessous :

$/c-y_0/b/1/$

/v/u/0/

/0/v/u/

Par Sarrus on obtient $u^2(c-y_0)+v^2-buv$, soit

$(p-c+b^2+y_0)^2(c-y_0)+(q+bc-by_0)^2-b(p-c+b^2+y_0)(q+bc-by_0), =-y_0^3+c_2y_0^2+c_1y_0+c_0$, avec

$c_2=3c-2p$

$c_1=-3bq+4cp-3c^2-p^2-b^2p$

$c_0=(p-c+b^2)(cp-bq-c^2)+(q+bc)^2$

Le résultant étant nul , c'est que

y_0 est solution de l'équation $-y_0^3+c_2y_0^2+c_1y_0+c_0=0$, notée (E3)

3ième étape : simplification de l'équation (E3) et résolution de (E)

Evidemment cette équation du 3ième degré (E3) n'est pas plus simple que l'équation (E) du départ, mais les coefficients b et c du polynôme T sont quelconques dans ce qui précéde ; or si on peut les choisir de telle sorte que cette équation (E3) soit justemment de la forme $y_0^3+k=0$ alors on aura "facilement" y_0, par des racines 3ièmes, et comme $T(x_0)=y_0$, on aura x_0 (solution de notre équation (E) de départ) par résolution d'une équation du second degré ; mais ici il y a mieux : en effet si y_0 est solution de (E3), c'est que le résultant est nul, donc $T-y_0$ et R ont une racine commune, qui est forcément l'unique racine de R (si R n'est pas le polynôme nul, ce qui peut arriver... voir remarque 1), laquelle va être aussi racine de P (d'après la relation de la division euclidienne de P par $T-y_0$) et ainsi chaque y_0 solution de (E3) va donner une solution de l'équation (E) de départ.

Simplifions donc (E3) : il suffit de choisir b et c tels que $c_2=c_1=0$

Obligatoirement il faut prendre $c=2p/3$ et b devra être solution de $-3bq+4(2p/3)p-3(2p/3)^2-p^2-b^2p=0$, soit

$pb^2+3qb-p^2/3=0$ ou $b^2+(3q/p)b-p/3=0$, qui n'est autre que l'équation déjà rencontrée lors du chapitre 3 et qui est, à une homothétie près, l'équation de Hudde (si on pose $b'=(p/3)b$, b' est solution de l'équation de Hudde : $X^2+qX-p^3/27=0$, voir chapitre 3).

Le discriminant de cette équation est $(27q^2+4p^3)/(3p^2)$ (air connu...) et on prendra

comme solution $b=(3/p)(-q/2+A)$, avec A une racine 2ième quelconque de $(q^2/4+p^3/27)$

, laquelle sera évidemment réelle ou imaginaire pure, si p et q sont réels et selon le signe de $q^2/4+p^3/27$.

b et c étant ainsi choisis, à savoir $c=2p/3$ et $b=(3/p)(-q/2+A)$ avec $A^2=q^2/4+p^3/27$, alors

(E3) s'écrit $-y_0^3+c_0=0$

avec $c_0=(p-c+b^2)(cp-bq-c^2)+(q+bc)^2$

Notons à ce niveau qu'avec ce choix de b, si $4p^3+27q^2\neq 0$, alors R ne peut être le polynôme nul et la fonction $y\to(-q-bc+by)/(p-c-b^2+y)$ est injective.

En effet, si R est le polynôme nul alors $p-c+b^2+y_0=q+bc-by_0=0$, d'où (en éliminant y_0) $b^3+bp+q=0$ et f pas injective$\Leftrightarrow$ $-q-bc-b(p-c+b^2)=0$ soit encore $b^3+bp+q=0$;

mais on a aussi $b^2+(3q/p)b-p/3=0$ qui combiné avec $b^3+bp+q=0$, donne $4p^3+27q^2=0$ (on reporte $b^2=-(3q/p)b+p/3$ dans $b^3+bp+q=0$, ce qui donne $4bp/3-3qb^2+q=0$; on y reporte encore $b^2=-(3q/p)b+p/3$ et on obtient $b(4p^3+27q^2)=0$. Mais $b\neq 0$ car $p\neq 0$ et donc $4p^3+27q^2=0$).

Par ailleurs, on verra ci-dessous (dans l'approfondissement) que $4p^3+27q^2=0\Leftrightarrow c_0=0$.

Ainsi dans le cas $4p^3+27q^2\neq 0$ (voir remarque 1 pour le cas $4p^3+27q^2=0$), l'équation (E3) a trois solutions distinctes y_0, y_1, y_2, les trois solutions de $y^3=c_0$, et pour chacune de ces solutions y_i on obtient une racine de l'équation (E), à savoir (voir plus haut) la racine $r_i=(-q-bc+by_i)/(p-c+b^2+y_i)$ de R, puisque R n'est pas le polynôme nul, et pas une constante non nulle (voir fin de la 1ère étape) et r_0,r_1,r_2 sont distinctes car f est injective.

Donc pour $4p^3+27^2\neq 0$

les trois solutions, distinctes, de (E) sont

$$(-q-bc+by_0)/(p-c+b^2+y_0),\ (-q-bc+by_1)/(p-c+b^2+y_1),\ (-q-bc+by_2)/(p-c+b^2+y_2)$$

avec y_0, y_1, y_2, les trois solutions de $y^3=c_0$;

Bien sûr, par exemple, $y_1=jy_0$ et $y_2=j^2y_0$.

Remarquons que le fait que les solutions de (E) s'obtiennent à partir des solutions de (E3) à l'aide d'une fonction homograhique, rappelle la méthode de l'annexe 1 : voir ci-dessous, après la 2ième façon, l'analyse détaillée de cet aspect.

On a donc bien résolu (E) en se ramenant à une équation de la forme $y^3+k=0$

(cela en utilisant les opérations algèbriques habituelles (+,-,×,/) et les racines carrées)

Approndissement : je vais montrer qu'effectivement les trois racines ci-dessus de (E) sont celles données par Hudde (dans le cas $4p^3+27q^2$ non nul, voir chapitre 3) cela au prix de calculs....très longs.

Il faut commencer par exprimer c_0 uniquement en fonction de p et q : on va montrer que $c_0=(6A/p)^3(-q/2+A)$.

Notons que $b=(3/p)(-q/2+A)$ s'écrit $pb/3=-q/2+A$ et qu'évidemment $b^2=p/3-3qb/p$

On a vu plus haut que $c_0=(p-c+b^2)(cp-bq-c^2)+(q+bc)^2$

d'où

$c_0=(p/3+b^2)(2p^2/9-qb)+(q+2pb/3)^2$

$c_0=(2p/3-3qb/p)(2p^2/9-qb)+q^2+4pqb/3+(4/9)p^2(p/3-3qb/p)$

$c_0=(2p/3-3qb/p)(2p^2/9-qb)+q^2+(4/27)p^3$

On développe le produit de facteur et on remplace le terme en b^2 en fonction de b

$c_0=4p^3/27-(4pq/3+9q^3/p^2)b+2q^2+4p^3/27=8p^3/27+2q^2-(4pq/3+9q^3/p^2)b$

$c_0=8A^2-(4pq/3+9q^3/p^2)(3/p)(-q/2+A)$

$c_0=8A^2-(108q/p^3)A^2(-q/2+A)$

$c_0=A^2(8+54q^2/p^3-108qA/p^3)$

$c_0=A^2(216A^2/p^3-108qA/p^3)$

$c_0=216A^3/p^3(A-q/2)=(6A/p)^3(-q/2+A)$; le dernier coefficient $-q/2+A$ étant $pb/3$.

On commence, en voyant ce cube dans c_0, à entrevoir Hudde...et aussi que

$c_0=0 \Leftrightarrow 4p^3+27q^2=0$, car $-q/2+A$ ne peut être nul (sinon $A^2=q^2/4$, ce qui donne $p=0$, valeur exclue dès le début de cette étude) et donc $c_0=0 \Leftrightarrow A=0$, soit $4p^3+27q^2=0$.

Notons que puisse ici on cherche à retrouver les formules de Hudde, c'est que on est dans le cas $4p^3+27q^2$ non nul, donc on a c_0 non nul, et l'équation (E3), $y^3=c_0$, a trois solutions distinctes $y_i=(6A/p)s_i$, avec s_0, s_1, s_2 les trois racines 3ième de $-q/2+A$ et les racines de (E) sont, pour i=0,1,2 : $r_i=(-q-bc+b(6A/p)s_i)/(p-c+b^2+(6A/p)s_i)$.

Simplifions, en remplacant c par 2p/3 et b par $(3/p)(-q/2+A)$:

$r_i=(-q-2(-q/2+A)+(3/p)(-q/2+A)(6A/p)s_i)/(p/3+(9/p^2)(q^2/4-qA+A^2)+(6A/p)s_i)$

$r_i=A(-2+(18/p^2)(-q/2+A)s_i)/(p/3+(9/4)(q^2/p^2)-9qA/p^2+9A^2/p^2+(6A/p)s_i)$

$r_i=A(-2p^2+18(-q/2+A)s_i)/(9A^2-9qA+9A^2+6Aps_i)$

rappel : A est non nul

$r_i=(-2p^2+18(-q/2+A)s_i)/(18A-9q+6ps_i)$; et vu la définition de s_i :

$r_i=(-2p^2+18s_i^4)/(18s_i^3+6ps_i)$

$r_i=2(9s_i^4-p^2)/((6s_i)(3s_i^2+p))=2(3s_i^2-p)/(6s_i)$

$r_i=s_i-p/(3s_i)$

On y est presque ; s_i étant une racine 3ième de $-q/2+A$, $1/s_i$ est une racine 3ième de $1/(-q/2+A)=(-q/2-A)/(q^2/4-A^2)=(-q/2-A)/(-p^3/27)$ et ainsi $-p/(3s_i)$ est une racine 3ième de $-q/2-A$.

Or $-q/2+A$ et $-q/2-A$ sont les solutions de l'équation de Hudde ($X^2+qX-p^3/27=0$, voir chapitre 3) et comme $s_i\times(-p/(3s_i))=-p/3$, on peut prendre, par exemple,

$u=s_0$ et $v=-p/(3s_0)$, (ce u et ce v ont la même signification que ceux utilisés dans le chapitre 3, puisque leur produit est $-p/3$ et que ce sont des racines 3ièmes des deux solutions de l'équation de Hudde), on trouve que les trois solutions de (E) sont :

$r_0=u+v$ et comme $s_1=js_0$ et $s_2=j^2s_0$

$r_1=ju+v/j=ju+j^2v$

$r_2=j^2u+v/(j^2)=j^2u+jv$

soit exactement les formules de Hudde!!

Commentaire : évidemment la méthode de Hudde est 100 fois plus rapide, mais cette méthode de Tschirnhaus a son utilité : elle permet de réduire aussi les équations de degré >3 (par exemple toute équation de degré 5 se ramène à $X^5+pX+q=0$).

Remarque 1 : cas $c_0=0 \Leftrightarrow 4p^3+27q^2=0$

Rappelons qu'il a été supposé dès le début que p est non nul. On a donc, puisque $4p^3+27q^2=0$ entraîne $A=0$, $b=-3q/(2p)$ et $y_0=0$ (seule solution de (E3)) ; et puisque c est toujours égal à $2p/3$, on peut alors vérifier alors que R est le polynôme nul $(p-2p/3+(9/4)(q^2/p^2)=0$ et et $q+(2p/3)(-3q/(2p))=0$, et donc $P(X)=Q(X)(T(X)-y_0)=(X-b)T(X)=(X+3q/(2p))(X^2-(3q/(2p))X+2p/3)$, ce qui donne les racines de P : $-3q/(2p)$ qui est double et $3q/p$ (le discriminant du facteur du 2ième degré est $-3p=(9q/(2p))^2$). On retrouve bien sûr le même résultat que celui donné dans le chapitre 3.

A noter qu'ici, l'équation $T(x)=y_0$, soit $T(x)=0$ a ses deux racines qui sont aussi racines de P.

Remarque 2 :

Parfois certains auteurs ne considèrent que le résultant de P et $T-T(x_0)$ et donc pour tout y_0 solution de (E3) , leur seule possibilité est de dire que $T-T(x_0)=T-y_0$ a une racine commune avec P et donc il faut résoudre l'équation du second degré $T(x)=y_0$, soit $x^2+bx+c-y_0=0$.

Il est clair que pour des y_0 distincts, ces équations auront des ensembles solutions distincts. Donc dans le cas où $4p^3+27q^2$ est non nul, puisqu'il y a alors trois possibilités distinctes pour y_0, et que chacune des équations $x^2+bx+c-y_0=0$ a au moins une racine commune avec P, c'est que chacune de ces équations n'a qu'une racine commune avec P. Mais laquelle? En pratique il faut pour chacune de ces équations, tester laquelle de ses racines est racine de P.

2ième façon : Tschirnhaus et les sommes de Newton

Elle est aussi calculatoire (si on veut aller jusqu'au bout des calculs) que la 1ière façon.

Considérons l'équation (G) $x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, de racines, dans C , x_1,x_2,x_3.

On pose $S_n=(x_1)^n+(x_2)^n+(x_3)^n$, pour n entier non nul.

On a les résultats classiques suivants :

$a_2=-(x_1+x_2+x_3)$

$a_1=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

$a_0=-x_1x_2x_3$

$S_1=-a_2$

$S_2=(a_2)^2-2a_1$

$S_3=-(a_2)^3+3a_1a_2-3a_0$

$S_4=(a_2)^4-4a_1(a_2)^2+4a_0a_2+2(a_1)^2$

$S_5=-(a_2)^5+5a_1(a_2)^3-5a_0(a_2)^2-5(a_1)^2a_2+5a_0a_1$

$S_6=(a_2)^6-6a_1(a_2)^4+9(a_1)^2(a_2)^2+6a_0(a_2)^3-12a_0a_1a_2-2(a_1)^3+3(a_0)^2$

Pour S_1 c'est évident, pour S_2 on utilise l'identité $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$;

ensuite on remplace x par x_i dans l'équation (G) et on ajoute membre à membre les 3 égalités obtenues, ce qui donne $S_3+a_2 S_2+a_1 S_1+3a_0=0$;

ensuite on multiplie par x l'équation (G), puis on y remplace x par x_i et on ajoute membre à membre les 3 égalités obtenues,......

<u>Nota</u> si $S_1=S_2=0$ alors $a_2=a_1=0$ et $a_0=-S_3/3$

Dans le cas particulier $a_2=0$, $a_1=p$, $a_0=q$, c'est-à-dire dans le cas où l'équation (G) est l'équation (E) $x^3+px+q=0$, les sommes S_i se simplifient beaucoup :

$S_1=0$

$S_2=-2p$

$S_3=-3q$

$S_4=2p^2$

$S_5=5pq$

$S_6=-2p^3+3q^2$

Essayons pour résoudre l'équation (E) $x^3+px+q=0$, de racines x_1, x_2, x_3 de se ramener à $y^3+k=0$.

Pour cela on considère la transformation de Tschirnhaus $y=T(x)=x^2+bx+c$: on pose $y_i=x_i^2+bx_i+c$ et on chercher b et c de telle sorte que

$y_1+ y_2+ y_3=(y_1)^2+(y_2)^2+(y_3)^2=0$

et ainsi les y_i seront solutions (voir le Nota plus haut) de $y^3+k=0$ avec $k=-((y_1)^3+(y_2)^3+(y_3)^3)/3$

Mais est-il possible de trouver effectivement b et c ....en utilisant les opérations habituelles et que des racines carrées?

$y_1+ y_2+ y_3=S_2+bS_1+3c=-2p+3c$

$(y_1)^2+(y_2)^2+(y_3)^2=S_4+b^2S_2+3c^2+2bS_3+2cS_2+2bcS_1=2p^2-2pb^2+3c^2-6qb-4pc$

D'où les deux équations $-2p+3c=0$ et $-2pb^2-6qb+2p^2+3c^2-4pc=0$.

Obligatoirement $c=2p/3$ et donc b est solution de $pb^2+3qb-p^2/3=0$: <u>on retrouve exactement les mêmes résultats que ceux trouvés pour c et b lors de la 3ième étape de la 1ère façon</u> (ils s'obtiennent bien en utilisant les opérations habituelles et les racines carrées).

Pour le "fun" vérifions que ces trois y_i sont bien solutions de la même équation (E3) vue lors de la 1ière étape, à savoir $y^3=c_0$ avec $c_0=8p^3/27+2q^2-(4pq/3+9q^3/p^2)b$ (voir un résultat intermédiaire dans le calcul de c_0 fait dans l'appronfondissement situé après la 3ième étape de la 1ière façon).

Il s'agit donc de vérifier que $((y_1)^3+(y_2)^3+(y_3)^3)/3=8p^3/27+2q^2-(4pq/3+9q^3/p^2)b$.

Par utilisation de $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+c)+6abc$, on obtient

$(y_1)^3+(y_2)^3+(y_3)^3=S_6+3bS_5+(3b^2+3c)S_4+(b^3+6bc)S_3+(3b^2c+3c^2)S_2+3bc^2S_1+3c^3$

$=-2p^3+3q^2+3b(5pq)+(3b^2+3c)(2p^2)+(b^3+6bc)(-3q)+(3b^2c+3c^2)(-2p)+3c^3$

mais $c=2p/3$, d'où

$=-2p^3+3q^2+3b(5pq)+(3b^2+2p)(2p^2)+(b^3+4bp)(-3q)+(2b^2p+4p^2/3)(-2p)+8p^3/9$

$=2p^3/9+3q^2+3pqb+2p^2b^2-3qb^3$

mais $pb^2+3qb-p^2/3=0$, donc $p^2b^2=-3pqb+p^3/3$ et $p^3b^3=bp(9q^2+p^3/3)-p^3q$, d'où

$=2p^3/9+3q^2+3pbq-6pbq+2p^3/3-3q(bp(9q^2+p^3/3)-p^3q)/p^3$

$=8p^3/9+3q^2-3pqb-3pqb(9q^2/p^3+1/3)+3q^2$

$=8p^3/9+6q^2-(4pq+27q^3/p^2)b$

et donc $((y_1)^3+(y_2)^3+(y_3)^3)/3=8p^3/27+2q^2-(4pq/3+9q^3/p^2)b$!!

Les y_i sont donc bien les solutions de la même équation (E3) $y^3=c_0$ vue lors de la 1ière façon.

A noter, en liaison avec la remarque 2 de la 1ière façon, qu'une fois les y_i obtenus, pour remonter aux solutions de l'équation (E) $x^3+px+q=0$, il faudra résoudre les trois équations du second degré $y_i=(x_i)^2+bx_i+c$, et pour chacune d'entre elles, tester quelle est la solution effectivement solution de (E).

Lien avec la nouvelle méthode développée en annexe 1

On a constaté plus haut (voir 1ère façon) que les solutions de (E) étaient les images des solutions de (E3) par une fonction homographique. Approfondissons cet aspect dans le cas $4p^3+27q^2\neq 0$, en se référant toujours aux calculs de la 1ière façon.

Les trois racines de (E), distinctes, sont alors $(-q-bc+by_i)/(p-c+b^2+y_i)$, les y_i étant les trois racines de (E3) et $c=2p/3$ et $b=(3/p)(-q/2+A)$, solution de $X^2+(3q/p)X-p/3=0$.

Soit y une racine quelconque de (E3), alors $r=(-q-bc+by)/(p-c+b^2+y)$ est une racine de (E).

On ne peut avoir r=b, car alors on aurait $b^3+pb+q=0$ et comme $b^2+(3q/p)b-p/3=0$, cela conduirait à $4p^3+27q^2=0$ (voir calcul fait pour justifier que R n'est pas le polynôme nul).

On a donc $y=(-q-bc+r(-p+c-b^2))/(r-b)=(-p+c-b^2)(r-(q+bc)/(-p+c-b^2))/(r-b)$

Par ailleurs $y^3= (6A/p)^3(-q/2+A)$, (car y solution de (E3)), donc

$((r-(q+bc)/(-p+c-b^2))/(r-b))^3=(6A/p)^3(-q/2+A)/(-p+c-b^2)^3$.

Ainsi les solutions de (E) sont donc en fait les solutions de l'équation $((x-r')/(x-s))^3=t$ avec

$r'=(q+bc)/(-p+c-b^2)$, $s=b$, $t=(6A/p)^3(-q/2+A)/(-p+c-b^2)^3$ (Attention : il s'agit bien de la lettre r', r étant réservé pour la racine de R)

Or la méthode de l'annexe 1, c'est quoi?

C'est chercher 3 nombres : r' (en fait il est noté r dans l'annexe 1) , s, t, tels que l'équation (E) soit équivalente à $((x-r')/(x-s))^3=t$: le fait que cela soit possible résulte donc de la méthode de Tschirnhaus, laquelle donne d'ailleurs les valeurs de r',s,t.

Vérifion que r' et s donnés par Tschirnhaus sont bien les mêmes que ceux obtenus à l'annexe 1:

$r'=(q+bc)/(-p+c-b^2)=(q+2pb/3)/(-p+2p/3+3qb/p-p/3)$, car $b^2+(3q/p)b-p/3=0$,

d'où $r'=(q+2pb/3)/(-2p/3+3qb/p)=(q+2b/3)/(-2b^2-3qb/p)=-p/(3b)$.

Comme b est solution de $X^2+3qX/p-p/3=0$, et que le produit des solutions de cette équation est $-p/3$, c'est que l'autre solution est justemment $r'=(q+bc)/(-p+c-b^2)=-p/(3b)$.

Donc r' et s (définis ci-dessus) sont le r' (noté r dans l'annexe 1) et le s de la méthode de l'annexe 1 (cas de la méthode M' : voir résumé pratique de la méthode M).

Je conclurai en disant que sur le fond il n'y a pas tellement de différence entre la méthode de Tschirnhaus et celle de l'annexe 1 ; mais sur la forme oui.

Retour sommaire sur les équations ou sommaire du site