<- Sommaire Site

Annexe 1

Une nouvelle méthode de résolution des équations du 3ième degré.

J'ai trouvé cette nouvelle méthode sur le net par hasard. Elle a été rédigée à l'occasion du prix Fermat junior de mathématiques 1995 : elle a obtenu une mention spéciale, mais pas le prix Fermat, voir http://spoirier.lautre.net/equation.pdf

Cette méthode consiste à résoudre, dans C, l'équation

(1)-> $x^3+3ax^2+3bx+c=0$ en se ramenant à l'équation suivante :
(2)-> $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$

Dans le chapitre 3 j'ai présenté cette méthode dans le cas particulier où (1) est ramené à

(3) $x^3+px+q=0$

l'équation du second degré dont les racines sont r et s est alors assez facile à obtenir ; c'est un peu moins facile lorsqu'on travaille à partir de (1).

Je vais ici présenter les calculs justificatifs de cette nouvelle méthode M lorsqu'on l'applique à (1), ces calculs justificatifs n'étant les mêmes que ceux de l'article situé à spoirier.lautre.net/equation.pdf, et je vais les comparer à ceux faits dans le chapitre (3) pour passer de $x^3+px+q=0$ à $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$ (que j'appelerai ici méthode M').

On peut sauter bien sûr tous ces calculs et aller tout de suite au Résumé pratique de la méthode M
(voir en annexe de cette annexe 1, une toute autre manière de justifier cette méthode)

Rappelons tout d'abord que pour passer de (1) à (3), il suffit de remplacer dans (1) x par x-a et alors (1) devient

(3)-> $x^3+px+q=0$ avec

$p=3(b-a^2)$, $q=2a^3-3ab+c$, $4p^3+27q^2=27(4b^3+4a^3c-3a^2b^2+c^2-6abc)$.

Vu que $(x-r)^3-t(x-s)^3=(1-t)x^3+3(st-r)x^2+3(-s^2t+r^2)x+ts^3-r^3$

(1) se ramènera à (2)

ssi $t\neq1$, $(st-r)/(1-t)=a$, $(-s^2t+r^2)/(1-t)=b$, $(s^3-r^3)/(1-t)=c$.

Lorsque $a=0$ (voir méthode M') on en déduit tout de suite que $r=st$, ce qui permet de simplifier par $1-t$ les deux autres fractions et on arrive rapidement à r et s solutions d'une équation du 2ième degré (à coefficients dépendants de $b=p/3$ et $c=q$).

Mais ici $a\neq 0$, et c'est donc un peu plus compliqué (normal l'équation (1) n'a pas été réduite à la forme (3)).

L'auteur de M invoque un résultat astucieux sur les suites récurrentes pour trouver l'équation du 2ième degré dont r et s sont solutions.

Faisons le directement ; en isolant t dans les dans les trois équations on obtient :

(1) se ramène à (2) ssi on a les quatre conditions suivantes

(4) $t\neq 1$, $(s+a)t=r+a$, $(-s^2+b)t=-r^2+b$, $(s^3+c)t=r^3+c$

si $s=-a$ alors $r=-a$ et les deux dernières conditions donnent

$(-a^2+b)t=-a^2+b$, $(-a^3+c)t=-a^3+c$.

Mais $t\neq 1$, donc nécessairement on doit avoir $a^2=b$ et $a^3=c$

Réciproquement si on a $a^2=b$ et $a^3=c$, on peut vérifier effectivement que (1) équivaut à (2) pour $s=r=-a$ et $t\neq 1$ puisque (1) s'écrit $(x+a)^3=0$ et (2) s'écrit $(1-t)(x+a)^3=0$.

<u>En fait</u> si $a^2-b=0$ ($\Leftrightarrow$ $p=0$) on voit tout de suite que (1) s'écrit $(x+a)^3+c-a^3=0$ et donc il n'y a pas de problème pour résoudre (dans ce cas (3) s'écrit $y^3+q=0$ avec $q=-a^3+c$)

<u>Plaçons nous maintenant dans le cas</u> $a^2-b\neq 0$ ($\Leftrightarrow$ $p\neq 0$)

On ne peut donc avoir $s=-a$ et donc nécessairement $t=(r+a)/(s+a)$ et en reportant dans les deux dernières conditions on obtient :

$(-s^2+b)(r+a)=(s+a)(-r^2+b) \Leftrightarrow rs(r-s)+a(r^2-s^2)+b(r-s)=0 \Leftrightarrow (r-s)(rs+b+a(r+s))=0$

$(s^3+c)(r+a)=(s+a)(r^3+c) \Leftrightarrow sr(s^2-r^2)+a(s^3-r^3)+c(r-s)=0 \Leftrightarrow (s-r)(rs(r+s)-c+a(r^2+rs+s^2))=0$

Comme $r=s$ est inacceptable (cela conduit à $t=1$), nécessairement on a

$rs+a(r+s)=-b$

$rs(r+s)+a((r+s)^2-rs))=c$

En reportant $rs=-b-a(r+s)$ dans la 2ième équation , on obtient $(a^2-b)(r+s)=c-ab$; mais $a^2-b\neq 0$ donc $r+s=(c-ab)/(a^2-b)$, puis $rs=-b-a(c-ab)/(a^2-b)=(b^2-ac)/(a^2-b)$ et

<u>r et s sont donc solutions de l'équation du 2ième degré</u>

(5)-> $X^2-((c-ab)/(a^2-b))X+(b^2-ac)/(a^2-b)=0$.

Réciproquement, on vérifie tout de suite, en notant toujours r et s les deux solutions de (5), que l'on a effectivement

$rs+a(r+s)+b=0$

(car $rs+a(r+s)=(b^2-ac)/(a^2-b)+a((c-ab)/(a^2-b))=(b^2-a^2b)/(a^2-b)=-b$), ainsi que

$rs(r+s)+a((r+s)^2-rs))=c$

(car $rs(r+s)+a((r+s)^2-rs))=(r+s)(a(r+s)+rs)-ars=-b(r+s)-ars=(-bc+ab^2-ab^2+a^2c)/(a^2-b)=c$).

En outre cette équation ne peut avoir -a comme solution,

(car $a^2+((c-ab)/(a^2-b))a+(b^2-ac)/(a^2-b)=a^2+a(r+s)+rs=a^2-b$, qui est non nul).

Notons que si a=0 cette équation s'écrit $X^2+(c/b)X-b=0$, soit (puisque alors p=3b, q=c) $X^2+(3q/p)X-p/3=0$ qui est bien celle obtenue lors la méthode M', au cours de laquelle on avait aussi remarqué que pr/3=br et ps/3=bs sont solutions de $X^2+qX-p^3/27=0$ qui est l'équation (E1) de Hudde.

D'ailleurs.....c'est encore vrai (mais est-ce étonnant?) dans le cas de cette méthode M à condition de remplacer r par r+a et s par s+a :

$(r+a)(s+a)=rs+a(r+s)+a^2=-b+a^2=-p/3$ et

$(r+a)+(s+a)=(c-ab)/(a^2-b)+2a=(2a^3-3ab+c)/(a^2-b)=q/(-p/3)=-3q/p$

ainsi r+a et s+a sont solutions de $X^2+(3q/p)X-p/3=0$ et donc p(r+a)/3 et p(s+a)/3 sont solutions de $X^2+qX-p^3/27=0$; cette remarque sera utilisée plus loin pour retrouver Hudde.

Revenons sur l'équation (5) ci-dessus : il ne suffit pas que r et s soient solutions de cette équation (5) pour que les conditions (4) soient vérifiées : il est nécessaire que t=(r+a)/(s+a) soit différent de 1, donc que r et s soient distincts, donc que le discriminant Δ de l'équation (5) soit non nul.

Ce discriminant est $\Delta=((c-ab)^2-4(a^2-b)(b^2-ac))/(a^2-b)^2 =(4a^3c+4b^3-3a^2b^2+c^2-6abc)/(a^2-b)^2$.

Mais $4a^3c+4b^3-3a^2b^2+c^2-6abc=(4p^3+27q^2)/27$ (avec $p=3(b-a^2)$ et $q=2a^3-3ab+c$: voir début de cette annexe 1), et ainsi

$27\Delta=(4p^3+27q^2)/(a^2-b)^2$!

Donc si $a^2-b\neq0$ ($\Leftrightarrow$ $p\neq0$) et $4p^3+27q^2=0$, (1) ne peut se ramener à (2) ; bien entendu cela avait été remarqué lors de la méthode M'.

De toute façon, (non signalé dans l'article), dans ce cas on connaît les solutions de (3) : 3q/p simple et -3q/(2p) double et donc les solutions de (1) sont -a+3q/p simple et -a-3q/(2p) double.

Par contre si $-p/3=a^2-b\neq0$ et $4p^3+27q^2\neq0$, l'équation (5) a deux racines distinctes r et s (et toutes deux distinctes de -a, voir plus haut), qui conduisent à $t=(r+a)/(s+a)\neq1$.

Mais est-on sûr que les deux dernières conditions de (4) sont effectivement vérifiées?

Oui, car les deux relations (conséquences de l'équation (5))

$$rs+a(r+s)+b=0 \text{ et } rs(r+s)+a((r+s)^2-rs)=c$$

multipliées par s-r (cad on "remonte" les calculs faits pour obtenir (5)) donnent

$(-s^2+b)(r+a)=(s+a)(-r^2+b)$ et $(s^3+c)(r+a)=(s+a)(r^3+c)$, donc $(-s^2+b)t=(-r^2+b)$ et $(s^3+c)t=(r^3+c)$.

Finalement si $a^2-b\neq0$ ($\Leftrightarrow p\neq0$) et $4p^3+27q^2\neq0$

(1) peut se ramener à (2) c'est-à-dire à $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$, avec r et s solutions (distinctes) de (5) et $t=(r+a)/(s+a)$.

s ne peut être solution de (2), (car cela conduit à r=s), et donc l'équation (2) est équivalente à $((x-r)/(x-s))^3=t$, soit $(x-r)/(x-s)=\theta_i$, avec θ_i une des trois racines 3ième de $(r+a)/(s+a)$; $(r+a)/(s+a)$ a bien trois racines 3ièmes car $r+a\neq0$ (si $r=-a$, alors $t=0$ d'où, d'après $(-s^2+b)t=(-r^2+b)$, (voir conditions (4)), on aurait $b=r^2$ soit $b=a^2$, cas exclu).
Donc, puisque $\theta_i\neq1$ (car $r\neq s$), les trois solutions de (1) sont $x_i=(r-\theta_i s)/(1-\theta_i)$.

<u>Résumé pratique de la méthode M pour résoudre l'équation (1)</u>

$x^3+3ax^2+3bx+c=0$

si $a^2-b=0$ l'équation (1) s'écrit en fait $(x+a)^3+c-a^3=0$, de la forme $y^3=k$ avec $y=x+a$, donc pas de problème

si $a^2-b\neq0$

on considère l'équation (5) $X^2-((c-ab)/(a^2-b))X+(b^2-ac)/(a^2-b)=0$ dont les solutions sont r et s, distinctes de -a

--soit son discriminant est nul (donc r=s)
les solutions de (1) sont alors $-a+3q/p$ simple et $-a-3q/(2p)$ double avec $p=3(b-a^2)$, $q=2a^3-ab+c$; ce qui me semble un peu mieux que se contenter de dire : (1) a une racine double que l'on peut obtenir en calculant le pgcd(P,P'), P étant le 1er membre de (1).

--soit son discriminant est non nul et l'équation (1) équivaut à $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$, avec $t=(r+a)/(s+a)\neq0$ et $\neq1$
Les 3 solutions de (1) sont $x_i=(r-\theta_i s)/(1-\theta_i)=s+(r-s)/(1-\theta_i)$, avec $\theta_0,\theta_1,\theta_2$ les trois racines 3ièmes de $(r+a)/(s+a)$.
Bien entendu il y a deux choix possibles pour le couple (r,s) mais échanger r et s revient à changer θ_i en $1/\theta_i$ et $(s-(1/\theta_i)r)/(1-(1/\theta_i))=(\theta_i s-r)/(\theta_i-1)=(r-\theta_i s)/(1-\theta_i)$: on retrouve, dans le même ordre, les mêmes solutions.

<u>Deux remarques</u> sur cette équation (5) de la méthode M, (donc $a^2-b\neq0$) :

1) Rappelons que si a=0, l'équation (5), qui a pour solutions r et s, s'écrit $X^2+(c/b)X-b=0$, soit $X^2+(3q/p)X-p/3=0$: qui est bien l'équation trouvée lors de la méthode M'.

2) Une autre remarque sur l'équation (5), lorsque son discriminant est non nul et lorsque son terme constant est nul, c'est-à-dire lorsque $b^2-ac=0$.
Dans ce cas a,b,c sont non nuls : si a=0 alors b=0 et aussi $a^2-b=0$, ce qui est exclu ; si c=0 alors b=c=0 et (5) se réduit à $X^2=0$, donc son discriminant est nul, ce qui est exclu ; si b=0 alors a=0 ou c=0, ce qui vient d'être exclu.
Et les solutions de (5) sont 0 et $(c-ab)/(a^2-b)=-b/a$.

En prenant s=0, r=-b/a, les trois solutions de (1) sont $x_i=b/(a(\theta_i-1))$ (non nulles puisque $b\neq 0$) : ce sont donc, aussi, les trois solutions de $(b/x+a)^3+ba-a^3=0$, (puisque $\theta_i^3=(r+a)/(s+a)=1-b/a^2$).
Vérifions directement que si $b^2-ac=0$ et a, b, c sont non nuls alors (1) est effectivement équivalente à l'équation ci-dessus : $(1)\Leftrightarrow c/x^3+3b/x^3+3a/x+1=0$, car (1) n'a pas 0 comme solution, $\Leftrightarrow b^3/x^3+3b^2a/x^2+3ba^2/x+ba=0$, puisque $ba\neq 0$ et $b^2=ac$, $\Leftrightarrow (b/x+a)^3+ba-a^3=0$

Application de cette méthode M à l'exemple $x^3-3x^2-4x+12=0$.

a=-1 ; b=-4/3 ; c=12 ; $a^2-b=7/3$; c-ab=32/3 ; $b^2-ac=124/9$

l'équation (5) est $X^2-(32/7)X+124/21=0$ de discriminant $-400/(3\times 49)$ et ses solutions sont $(48\pm 10\sqrt{3}i)/21$:

en prenant $r=(48+10\sqrt{3}i)/21$ et $s=(48-10\sqrt{3}i)/21$, $(r+a)/(s+a)=(27+10\sqrt{3}i)/(27-10\sqrt{3}i)$, dont il faut chercher les racines 3ièmes......

En écrivant $(r+a)/(s+a)=(143+180\sqrt{3}i)/343$ et avec "une bonne vue" on voit que $(r+a)/(s+a)= ((13+3\sqrt{3}i)/14)^3$, et donc une 1ière solution de $x^3-3x^2-4x+12=0$ est

$[(48+10\sqrt{3}i)/21-((13+3\sqrt{3}i)/14)(48-10\sqrt{3}i)/21]/[1-(13+3\sqrt{3}i)/14]$

Je laisse le lecteur effectuer le calcul : c'est -2 (pour trouver les deux autres, 2 et 3, le mieux est de diviser par x+2).

Remarque : si on remplace x par x-(-1) dans l'équation $x^3-3x^2-4x+12=0$, elle devient $x^3-7x+6=0$.

On a donc cette fois a=0, b=-7/3,c=6, $a^2-b=7/3$, c-ab=6, $b^2-ac=49/9$ (appliquer la méthode M, c'est appliquer , ici, exactement la méthode M').

l'équation (5) est $X^2-(18/7)X+7/3=0$ de discriminant $-400/(3\times 49)$ (le même que ci-dessus) et ses solutions sont $(27\pm 10\sqrt{3}i)/21$:

en prenant $r=(27+10\sqrt{3}i)/21$ et $s=(27-10\sqrt{3}i)/21$, on retrouve le même $(r+a)/(s+a)=(27+10\sqrt{3}i)/(27-10\sqrt{3}i)$.

Et donc une 1ière solution de $x^3-7x+6=0$ est

$[(27+10\sqrt{3}i)/21-((13+3\sqrt{3}i)/14)(27-10\sqrt{3}i)/21]/[1-(13+3\sqrt{3}i)/14]=-3$.

Cet exemple, $x^3-7x+6=0$, a été traité par la méthode de Hudde, voir chapitre 4 (exemple n°8 de la 1ière série d'exemples) : les racines 3ièmes u et v (avec uv=-p/3) des solutions $-3\pm 10\sqrt{3}i/9$de (E1) ne sont pas simples à déterminer (notons que les solutions de (E1) étant conjuguées il en est de même pour leurs racines 3ièmes, et donc il suffit de chercher les racines 3ièmes de l'une des solutions). Mais celles de (r+a)/(s+a) ne sont pas plus simples à déterminer.

Revenons à un aspect général : à titre de curiosité, par un "bon choix" des racines 3ièmes de (r+a)/(s+a), montrons que la méthode M (comme la méthode M') redonne formellement les solutions de Hudde.

Prenons comme racine 3ième particulière de (r+a)/(s+a) le rapport u/v avec u racine 3ième de p(r+a)/3 et v racine 3ième de p(s+a)/3 et uv=-p/3 (justification analogue au cas de la méthode M').

Rappel : ci-dessus on a vu que p(r+a)/3 et p(s+a)/3 sont solutions de $X^2+qX-p^3/27=0$, équation de Hudde.

Les trois solutions de (1) sont donc $(r-\theta_i s)/(1-\theta_i)$, avec $\theta_0=u/v$, $\theta_1=ju/v$, $\theta_2=j^2u/v$ les trois racines 3ièmes de (r+a)/(s+a).

Compte tenu que $(r-\theta_i s)/(1-\theta_i)=((r+a)-\theta_i(s+a))/(1-\theta_i)-a$, on trouve (par un calcul analogue à celui de la méthode M') que les trois solutions de (1) sont : $-a+u+v$, $-a+j^2u+jv$, $-a+ju+j^2v$, résultat évidemment prévisible puisque $u+v$, j^2u+jv, $ju+j^2v$ sont les trois solutions de (3), données par Hudde.

Annexe de ...l'annexe 1

Le résultat ci-dessus (méthode M) peut être obtenu d'une toute autre manière :

> soit par la méthode de Tschirnhaus (1683) : voir annexe 2
>
> soit par la méthode ci-dessous que je n'ai lue nulle part, mais bon je n'ai pas la prétention d'avoir tout lu sur la question.

Vu que les solutions de (1) sont $s+(r-s)/(1-\theta_i)$ avec $\theta_i^3=(r+a)/(s+a)$, on pose $x=s+1/(y+f)$ et on va chercher à déterminer f et s pour que x solution de (1) soit équivalent à $y^3+k=0$.

P(x) étant le 1er membre de (1), soit $P(x)=x^3+3ax^2+3bx+c$, la formule de Taylor donne :
$P(x)=P(s)+(x-s)P'(s)+(x-s)^2P''(s)/2+(x-s)^3P'''(s)/6$, d'où
$P(s+1/(y+f))=P(s)+P'(s)/(y+f)+P''(s)/(2(y+f)^2)+P'''(s)/(6(y+f)^3)$
et ainsi $P(s+1/(y+f))=0 \Leftrightarrow 6(y+f)^3P(s)+6(y+s)^2P'(s)+3(y+s)P''(s)+P'''(s)=0 \Leftrightarrow Ay^3+By^2+Cy+D=0$
avec $A=P(s)$, $B=3fP(s)+P'(s)$, $C=3f^2P(s)+2fP'(s)+P''(s)/2$, $D=f^3P(s)+f^2P'(s)+fP''(s)/2+1$.

On cherche donc s et f tels que B=C=0.
Si P(s)=0, alors on aurait (cf B=0) aussi P'(s)=0, donc s serait solution double de (1), c'est-à-dire on aurait $4p^3+27q^2=0$ (avec $p=3(b-a^2)$ et $q=2a^3-3ab+c$: voir début de cette annexe 1).
Mais dans ce cas on connaît tout de suite les solutions de (1) : $-a+3q/p$ (simple) et $-a-3q/(2p)$ (double) : je vais donc me placer dans le $4p^3+27q^2\neq0$.
Dans ce cas, B=0 entraîne $P(s)\neq0$ et ainsi $f=-P'(s)/(3P(s))$.
En reportant dans C=0 on obtient $2P'^2(s)-3P''(s)P(s)=0$, soit $2(3s^2+6as+3b)^2-3(6s+6a)(s^3+3as^2+3bs+c)=0$, ce qui donne non pas une équation de degré 4, mais une équation en s de degré au plus 2 :

$$(a^2-b)s^2+(ab-c)s+b^2-ac=0$$

Si $a^2-b=0$, (1) s'écrit $(x+a)^3+c-a^3=0$ et donc, là aussi, il n'y a pas de problème de résolution : on supposera donc $a^2-b\neq0$.

> s vérifie donc $s^2-((c-ab)/(a^2-b))s+(b^2-ac)/(a^2-b)=0$, c'est-à-dire s est solution de l'équation (5) de la méthode M!

On a vu (voir premiers calculs justificatifs de la méthode M) que le discriminant de cette équation est $(4p^3+27q^2)/(27(a^2-b)^2)$, donc non nul et (5) a deux solutions distinctes : on prend pour s une de ces solutions et r sera l'autre.

On a $rs+a(r+s)+b=0$,

(car $rs+a(r+s)=(b^2-ac)/(a^2-b)+a((c-ab)/(a^2-b))=(b^2-a^2b)/(a^2-b)=-b$),

et ces deux solutions sont distinctes de -a,

(car $a^2+((c-ab)/(a^2-b))a+(b^2-ac)/(a^2-b)=a^2+(r+s)a+rs= a^2-b$, alors qu'on a supposé a^2-b non nul).

s étant ainsi choisi, en prenant $f=-P'(s)/(3P(s))$ on a donc $B=C=0$ et $P(s+1/(y+f)) =0\Leftrightarrow Ay^3+D=0$.

Simplifions f :

> en fait s vérifie $2P'^2(s)-3P''(s)P(s)=0$; en outre $P''(s)=6s+6a\neq 0$ car on a vu que s était différent de -a, et aussi $P'(s)\neq 0$ puisque $P''(s)$ et $P(s)$ sont non nuls.
> On a donc $P(s)=2P'^2(s)/(3P''(s))$ et ainsi $f=-P''(s)/(2P'(s))=-6(s+a)/(2(3s^2+6as+3b))$
> D'où $f=-(s+a)/(s^2+2as-a(s+r)-sr)=-(s+a)/(s(s+a)-r(s+a))=1/(r-s)$.

Déterminons maintenant les solutions de $Ay^3+D=0$, soit $y^3=-D/A$, puisque $A=P(s)\neq 0$.

$D=f^3P(s)+f(fP'(s)+P''(s)/2)+1=f^3P(s)+1$ (puisque $f=-P''(s)/(2P'(s))$).

$D/A=f^3-3f/(P'(s))$, car $f=-P'(s)/(3P(s))$

$D/A=f^3(1-3/(f^2P'(s)))$, mais $f^2P'(s)=-fP''(s)/2=-3(s+a)/(r-s)$

$D/A=f^3(1+(r-s)/(s+a))=f^3(r+a)/(s+a)$

Finalement $Ay^3+D=0\Leftrightarrow y^3=-f^3(r+a)/(s+a)$.

En notant θ_0, θ_1, θ_2 les trois racines 3ièmes de $(r+a)/(s+a)$ (non nul, car r et s sont différents de -a), les trois solutions de $Ay^3+D=0$ sont donc $y_i=-f\theta_i$ et finalement

les trois solutions de (1) sont $x_i=s+1/(-f\theta_i+f) =s+(r-s)/(1-\theta_i)$: ce sont exactement les résultats de la méthode M.

Retour sommaire sur les équations ou sommaire du site