<-- Sommaire Site AP

http://alain.pichereau.pages.perso-orange.fr
marc.pichereau@wanadoo.fr

Sur l'équation tan(x)=x, x réel.

On va donner ici deux preuves, complétes, du fait que la somme S des carrés des inverses des solutions positives de l'équation tan(x)=x est égale à 1/10.

- l'une de ces preuves utilisera le théorème des résidus : voir [9] ci-dessous
- l'autre utilisera le théorème de Sturm-Liouville (relatif à l'équation différentielle y"-q(x)y=f (x)) et la théorie des opérateurs (linéaires) auto-adjoints : voir le [11] ci-dessous

  Par ailleurs on présentera deux généralisation du problème :

- l'une en considérant l'équation tan(x)=ux : voir le [10] ci-dessous où on montre que **la somme des carrés des inverses des solutions positives de l'équation tan(x)=ux, lorsque u≤0 ou u>1 est (3u-1)/(6(u-1))** ; cela servira pour établir le [11].
- l'autre en considérant toujours l'équation tan(x)=x, mais en envisageant d'autres sommes relatives à ses solutions positives (par exemple la somme des puissances 10 des inverses des solutions positives de l'équation tan(x)=x est égale à 59/197071875) voir le [12] ci-dessous.

[1]

Une simple représentation graphique, permet de voir tout de suite, que
pour tout entier n≥1, **l'équation tan(x)=x, notée (E), admet une seule solution dans]nπ;(n+1/2)π[, solution qui sera notée x_n.**
Bien entendu, une justification rigoureuse consiste à remarquer que f : x->f(x)=tan(x)-x est strictement croissante sur](n-1/2)π;(n+1/2)π[et que les limites aux bornes sont -∞ et +∞, et donc (valeurs intermédiaires), l'équation f(x)=0 adment une et une seule solution dans](n-1/2)π;(n+1/2)π[, et comme f(nπ)=-nπ, cette unique solution est en fait dans]nπ;(n+1/2)π[.
L'ensemble de ces x_n est l'ensemble des solutions réelles positives de (E).

n	x_n	(n+1/2)π
1	4,493...	4,712...
2	7,725...	7,851...
3	10,904...	10,995...
4	14,066...	14,137...

[2]

$x_n=n\pi+\int_0^{x\_n} 1/(1+t^2)dt=n\pi+\arctan(x_n)$; $\lim_{n\to+\infty} x_n-(n+1/2)\pi=0$; x_n est équivalent à $(n+1/2)\pi$.

$x_n-n\pi$ est dans $]0;\pi/2[$ qui est inclu dans $]-\pi/2;\pi/2[$, et comme $\tan(x_n-n\pi)=x_n$, c'est que $\arctan(x_n)=x_n-n\pi$, ce qui donne le premier résultat puisque $\arctan(x)=\int_0^x 1/(1+t^2)dt$.
Comme $\lim_{n->+\infty} x_n=+\infty$ ($n\pi<x_n$) et que $\lim_{x->+\infty} \arctan(x)=\pi/2$, $\lim_{n->+\infty} x_n-n\pi =\pi/2$, ce qui donne le 2ième résultat.
Enfin, comme x_n est dans $]n\pi;(n+1/2)\pi[$, $1< (n+1/2)\pi/x_n<1+1/(2n)$, donc $(n+1/2)\pi/x_n$ tend vers 1, c'est-à-dire x_n et $(n+1/2)\pi$ sont équivalents lorsque n tend vers $+\infty$.

[3]

Pour tout n&;1, on pose $a_n=(n+1/2)\pi$.
On vient de voir que $\lim_{n->+\infty} x_n-a_n=0$: on va préciser de quelle façon cette différence tend vers 0.
Pour tout $n\geq1$, $0< a_n-x_n<1/(n\pi)$
Il existe une suite, indépendante de n, $(c_{2i+1})_{i\geq0}$, telle que pour tout entier naturel $n\geq1$

- **$x_n=a_n-\sum_{i=0}^{+\infty}c_{2i+1}/a_n^{2i+1}$: c'est le développement en série entière, en $1/a_n$, de x_n-a_n.**
  Remarque : le rayon de convergence de la série entière $\sum_{i=0}^{+\infty}c_{2i+1}z^{2i+1}$ est supérieur ou égal à $1/a_1$, puisqu'il y a convergence pour cette valeur.
- et aussi, **pour tout entier naturel k, :**
  $x_n=a_n-c_1/a_n-c_3/(a_n^3)-...-c_{2k+1}/a_n^{2k+1}-e/a_n^{2k+1}$ avec $\lim_{n->+\infty} e=0$.

$c_1=1$; $c_3=2/3$; $c_5=13/15$; $c_7=146/105$; $c_9=781/315$;

Remarque 1 : on peut peut vérifier que le résultat ci-dessus est bien vrai pour n=1 :

- $x_1=4{,}493409...$
- $a_1=4{,}712...$
- $a_1-1/a_1=4{,}500...$
- $a_1-1/a_1-2/(3a_1^3)=4{,}4938...$
- $a_1-1/a_1-2/(3a_1^3)-13/(15a_1^5)=4{,}4934...$

Remarque 2 : en fait, dès n=3, on peut vérifier que a_n-1/a_n est déjà une "bonne" approximation de x_n.

Preuve.

Cf le [2], $a_n=x_n-\arctan(x_n)+\pi/2$.
Mais on sait que pour tout u>0, $\arctan(u)+\arctan(1/u)=\pi/2$, donc **$a_n=x_n+\arctan(1/x_n)$**, et comme $|1/x_n|<1$, on peut développer en série entière de $1/x_n$ l'arctan (le développement de arctan(x) est à facile à obtenir par dérivation, puis série géométrique, puis intégration), ce qui donne
$a_n=x_n+1/x_n-1/(3x_n^3)+1/(5x_n^5)-1/(7x_n^7)....$
Le problème est bien sûr "d'inverser" ce développement.
Notons tout de suite que la série étant alternée, $|a_n-x_n|\leq1/x_n<1/(n\pi)$, soit **$0< a_n-x_n<1/(n\pi)$**.

Posons **$t=(a_n-x_n)/a_n$: t est dans $]0;1[$**.
$t=\arctan(1/x_n)/a_n\sim(1/x_n)/a_n\sim(1/a_n)/a_n$, et donc $ta_n^2\sim1$ (le symbole ~ signifie équivalent pour n tendant vers $+\infty$).
Cela veut donc dire que **$ta_n^2=1+e$**, avec $\lim_{n->+\infty} e=0$.
Et ainsi **$x_n=a_n-1/a_n-e/a_n$, avec $\lim_{n->+\infty} e=0$**, ce qui donne les deux premiers termes du développement de x_n.

Mais, si cette idée, (utilisation de l'arctan) permet un calcul des coefficients (voir remarque à la fin de la preuve) elle ne permet pas de prouver la convergence de la série (du moins, je n'y arrive pas).

On va donc envisager une autre approche pour prouver l'existence d'un développement en série :
pour cela on va utiliser une formule d'inversion de Lagrange

Posons $d_n=a_n-x_n$, dans $]0;\pi/2[$; $\tan(x_n)=x_n$ donne $\tan(\pi/2-d_n)=a_n-d_n$, soit $\mathbf{d_n+\mathrm{cotg}(d_n)=a_n}$, ou encore $1/(d_n+\mathrm{cotg}(d_n))=1/a_n$ et ainsi
$f(d_n)=1/a_n$, avec $f(z)=\sin(z)/(z\sin(z)+\cos(z))$.

- f est holomorphe dans le disque ouvert $D(0,r)$ avec $r=\pi/2$ (car $z\sin(z)+\cos(z)$ ne s'annulle pas sur ce disque : voir preuve à la remarque du [8])
- 0 est le seul zéro de f dans $D(0,\pi/2)$, puisque $f(z)=0$ équivaut à $z=k\pi$
- il est simple, car $f'(0)\neq 0$ (vérification laissée au lecteur)

On peut alors appliquer **la formule d'inversion de Lagrange suivante :**

1) il existe a et b tels que $0<a<r$, $0<b$ et pour tout z tel que $|z|=a$ alors $|f(z)|\geq b$,
2) pour tout w tel que $|w|<b$, l'équation $f(z)=w$ a une et une seule solution $Z(w)$ dans le disque ouvert $D(0,a)$
3)$Z(w)=\sum_{i=1}^{+\infty}c_kw^k$,
avec kc_k égal au coefficient de z^{k-1} dans le développement en série de $(z/f(z))^k$.
Remarque : quoique $f(0)=0$, $z/f(z)$ admet un prolongement holomorphe en 0 car la limite en 0 de $z/f(z)$ est $1/f'(0)$.

Précisons a et b.
$z/f(z)=z^2+z\cot(z)$.
Or $z\cot(z)=\sum_{i=0}^{+\infty}(-4)^nB_{2n}z^{2n}/(2n)!$, où les B_{2n} sont les nombres de Bernoulli (E73, dossier 15),
et ainsi $z/f(z)=1+2z^2/3-z^4/45-2z^6/945-\ldots$, le rayon de convergence étant π.
D'où pour $|z|<0,7$, $|z/f(z)|<1+2\times 49/3+(0,7)^4(1+0,7^2+0,7^4+\ldots)<1,8$, et donc pour $|z|=0,69$, $|f(z)|>0,69/1,8>0,38$: on peut prendre **$a=0,69$ et $b=0,38$**. On remarquera que a est bien inférieur à $r=\pi/2$.
Comme $1/a_n\leq 1/a_1<0,38$, pour tout $n\geq 1$, l'équation $f(z)=1/a_n$ a une et une seule solution $Z(1/a_n)$ dans $D(0,a)$.
Or d_n est aussi une solution de cette équation dans $D(0,a)$ puisque $|d_n|<1/(n\pi)\leq 1/\pi<a=0,69$ et donc $d_n=Z(1/a_n)$.
D'où $d_n=\sum_{i=1}^{+\infty}c_k(1/a_n)^k$, soit **$x_n=a_n-\sum_{i=1}^{+\infty}c_k(1/a_n)^k$, avec kc_k=le coefficient de z^{k-1} dans le développement en série entière (dse) de $(z/f(z))^k=(z^2+z\cot(z))^k=(1+2z^2/3-z^4/45-2z^6/945\ldots)^k$**.

- $z/f(z)$ étant paire, $\mathbf{c_{2k}=0}$.
- c_1 est le coefficient de z^0 dans le dse de $z/f(z)$, donc $\mathbf{c_1=1}$
- $3c_3$ est le coefficient de z^2 dans le dse de $(z/f(z))^3$, cad le coefficient de z^2 dans le développement de
  $(1+2z^2/3)^3=1+3\times 2z^2/3+\ldots$, donc $3c_3=2$ et $\mathbf{c_3=2/3}$.
- $5c_5$ est le coefficient de z^4 dans le dse de $(z/f(z))^5$, cad le coefficient de z^4 dans le développement de
  $(1+2z^2/3-z^4/45)^5$:
  - $(1+2z^2/3-z^4/45)^2=1+4z^2/3+18z^4/45+\ldots$
  - $(1+4z^2/3+18z^4/45)^2=1+8z^2/3+116z^4/45+\ldots$

        - et dans $(1+8z^2/3+116z^4/45)(1+2z^2/3-z^4/45)$ le coefficient de z_4 est $116/45+16/9-1/45=13/3$ et donc $\mathbf{c_5=13/15}$.
    - $7c_7$ est le coefficient de z^6 dans le dse de $(z/f(z))^7$, cad le coeffcient de z^6 dans le développement de $(1+2z^2/3-z^4/45-2z^6/945)^5$:
        - $(1+2z^2/3-z^4/45-2z^6/945)^3=1+2z^2+19z^4/15+38z^6/189+...$
        - $(1+2z^2+19z^4/15+38z^6/189)^2=1+4z^2+98z^4/15+5168z^6/945+...$
        - et dans $(1+4z^2+98z^4/15+5168z^6/945)(1+2z^2/3-z^4/45-2z^6/945)$, le coefficient de z^6 est
          $5168/945+196/45-4/45-2/945=146/15$ et donc $\mathbf{c_7=146/105}$

Terminons par la preuve de
pour tout entier naturel k, : $x_n=a_n-c_1/a_n-c_3/(a_n^3)-...-c_{2k+1}/a_n^{2k+1}-e/a_n^{2k+1}$ avec $\lim_{n->+\infty} e=0$.

> $e=S(1/a_n)$, avec $S(x)=c_{2k+3}x^2+c_{2k+5}x^4+...$; cette série entière est évidemment convergente pour $x=1/a_1$ (cf le développement en série de x_1-a_1 en $1/a_1$), donc S est continue en 0, donc sa limite en 0 est $S(0)=0$ et comme $\lim_{n->+\infty}1/a_n=0$, $\lim_{n->+\infty} e=0$.

Remarque : **une autre façon d'obtenir les coefficients c_1, c_3, c_5, c_7**, en utilisant le développement en série de arctan (voir début de la preuve ci-dessus).

On sait (cf ce qui précéde) que $x_n=a_n-c_1/a_n-c_3/a_n^3-c_5/a_n^5-c_7/a_n^7-e/a_n^7$ avec $\lim_{n->+\infty} e=0$
En posant $t=(a_n-x_n)/a_n$, qui est dans $]0;1[$, on obtient $t=c_1/a_n^2+c_3/a_n^4+c_5/a_n^6+c_7/a_n^8+e/a_n^8$.
Or $a_n=x_n+\arctan(1/x_n)=x_n+1/x_n-1/(3x_n^3)+1/(5x_n^n)+...+(-1)^{k-1}(1/((2k+3)x_n^{2k+3}))+B_{k,n}^{(1)}/x_n^{2k+5}$, où $B_{k,n}^{(1)}=(-1)^k/(2k+5)+(-1)^{k+1}/((2k+7)x_n^2)+....$
On remarque que $|B_{k,n}^{(1)}|\leq(1/(2k+5))(1+1/x_n^2+1/x_n^4+1/x_n^6+....)=(1/(2k+5)(1-1/x_n^2)$, puisque $|1/x_n|<1$, d'où
$|B_{k,n}^{(1)}|\leq16/(15(2k+5))$, pour tout entier naturel n non nul, puisque $x_n>4$.
Dans toute la suite $B_{k,n}^{(i)}$ désignera une fonction bornée par rapport à n ;
Le cas particulier k=2 donne $a_n=x_n+1/x_n-1/(3x_n^3)+1/(5x_n^5)-1/(7x_n^7)+B_{2,n}^{(1)}/x_n^9$,
soit $a_nt=1/x_n-1/(3x_n^3)+1/(5x_n^5)-1/(7x_n^7)+B_{2,n}^{(1)}/x_n^9$, et en remplacant, dans le membre de droite x_n par $(1-t)a_n$, on obtient
$c_1/a_n+c_3/a_n^3+c_5/a_n^5+c_7/a_n^7+e/a_n^7=(1/a_n)(1-t)^{-1}-(1/(3a_n^3))(1-t)^{-3}+(1/(5a_n^5))(1-t)^{-5}-(1/(7a_n^7))(1-t)^{-7}+B_{2,n}^{(2)}/a_n^9$.
On remplace alors dans le membre de droite t par $c_1/a_n^2+c_3/a_n^4+c_5/a_n^6+c_7/a_n^8+e/a_n^8$, et pour obtenir c_1, c_3, c_5, c_7, il suffit de développer ce membre de droite jusqu'à l'ordre 7 (en $1/a_n$) et comme $(1-t)^{-m}$ est multiplié par $1/a_n^m$ et que t est en $1/a_n^2$, il suffit de développer, en t, $(1-t)^{-m}$ jusqu'à l'ordre $(7-m)/2$, et dans chaque puissance de t de $(1-t)^{-m}$, on ne garde que les puissances de $1/a_n$ inférieures ou égales à 7-m :

- $(1-t)^{-1}$ donne $1+t+t^2+t^3$ qui donne $1+(c_1/a_n^2+c_3/a_n^4+c_5/a_n^6)+(c_1^2/a_n^4+2c_1c_3/a_n^6)+c_1^3/a_n^6$
- $(1-t)^{-3}$ donne $1+3t+6t^2$ qui donne $1+3(c_1/a_n^2+c_3/a_n^4)+6c_1^2/a_n^4$
- $(1-t)^{-5}$ donne $1+5t$ qui donne $1+5c_1/a_n2$
- $(1-t)^{-7}$ donne 1 qui donne 1

Et on identifie :

- dans le membre de droite le coefficient de $1/a_n$ est 1, donc $\mathbf{c_1=1}$
- dans le membre de droite le coefficient de $1/a_n^3$ est $c_1-1/3=2/3$ donc $\mathbf{c_3=2/3}$

- dans le membre de droite le coefficient de $1/a_n^5$ est $c_3+c_1^2-(1/3)\times 3c_1+1/5=/3+1-1+1/5=13/15$, donc $\mathbf{c_5=13/15}$
- dans le membre de droite le coefficient de $1/a_n^7$ est $c_5+2c_1c_3+c_1^3-(1/3)(3c_3+6c_1^2)+(1/5)\times 5-1/7=146/105$, donc $\mathbf{c_7=146/105}$

[4]

x_n est transcendant, c'est-à-dire il n'est pas algèbrique, cad il n'est pas racine d'un polynôme à coefficients rationnels.

C'est une application du théorème de Baker :

si z (complexe) est non nul, z et e^z ne sont pas tous les deux algèbriques.

En effet, pour tout x réel, $e^{2ix}=e^{ix}/e^{-ix}=(1+i\tan(x))/(1-i\tan(x))$ et donc s'il existe x réel non nul solution de $\tan(x)=x$ qui soit algèbrique alors $(1+i\tan(x))/(1-i\tan(x))=(1+ix)/(1-ix)$ est algèbrique (l'ensemble des nombres algèbriques est un corps), donc e^{2ix} est algèbrique ; mais 2ix est aussi algèbrique et non nul, d'où une contradiction grâce au théorème de Baker.

[5]

Les zéros de la fonction de Bessel $J_{3/2}$ sont les solutions positives de (E)

Tout simplement parceque $J_{3/2}(x)=(2/(\pi x))^{1/2}(\sin(x)/x-\cos(x))$; c'est une solution de l'équation différentielle (de Bessel) $y''+(1/x)y'+(1-k^2/x^2)y=0$, avec $k=3/2$.

[6]

La série $u_n=1/x_n^2$, est convergente (donc commutativement convergente, puisque à termes positifs) ; on notera $S=\sum_{n\geq 1} 1/x_n^2$ sa somme.

En effet, la série u_n est à termes positifs et elle est majorée par la série convergente $1/(n\pi)^2$ (série de Riemann).

On déduit d'ailleurs de cette majoration que $S\leq(1/\pi^2)(1/1^2+1/2^2+1/3^2+...)=1/6$.

<u>Remarque</u> : on trouvera dans la littérature de nombreuses preuves du fait que $\text{zéta}(2)=\pi^2/6$, notamment il existe un document de Robin Chapman qui rassemble 14 preuves de ce résultat!

[7]

Une preuve "douteuse" de S=1/10

Là, ce n'est plus pareil : prouver que S=1/10 est beaucoup moins "facile" que les démonstrations précédentes!

J'ai vu sur le web deux preuves utilisant le **lemme** ci-dessous (indiscutable) :

Soit P le polynôme non constant $a_0+a_1X+...+a_nX^n$, avec a_0 non nul (donc il n'admet pas 0 comme racine).

Alors la somme des inverses des racines (dans C) de P est égale à $-a_1/a_0$. (cela se prouve facilement en considérant le polynôme $Q(X)=X^nP(1/X)$).

L'ensemble des solutions non nulles de (E) étant l'ensemble des solutions non nulles de $f(x)=0$,
avec $f(x)=\cos(x)-\sin(x)/x$ on développe en série entière f(x) au voisinage de 0, cela à partir des développements de cos(x) et sin(x) :
$f(x)=x^2g(x)$, où $g(x)=c_1+c_2x^2+c_3x^4+\ldots$, avec $c_k=(-1)^k2k/((2k+1)!)$. Le rayon de convergence de cette série est infini.
Les solutions de $g(x)=0$ sont donc les solutions non nulles de (E), donc les $\pm x_n$, pour $n\geq1$.
Considérons alors la fonction $y\to h(y)=c_1+c_2y+c_3y^2+\ldots$: elle s'annulle pour les $(x_n)^2$, donc en appliquant le lemme ci-dessus, la somme des inverses de ces $(x_n)^2$ est
$-c_2/c_1=(2/6)/(4/120)=1/10$ et "donc" S=1/10!
Mais évidemment il y a 2 impasses de taille :

- si les valeurs positives annulant h, ne peuvent être effectivement que les $(x_n)^2$ (on pose $y=x^2$), pourquoi n'y aurait-il pas d'autres valeurs, dans C, annulant h (y, réel négatif, ne peut annuler h, car alors h(y) est la somme d'une série dont tous les termes sont positifs et donc $h(y)<0$)?
- h n'est évidemment pas un polynôme, et donc on ne peut, à priori, utiliser le lemme ci-dessus (voir remarque ci-dessous).

Une tentative, pour améliorer ce raisonnement est de considérer le polynôme $P_n(y)=c_1+c_2y+c_3y^2+\ldots+c_{n+1}y^n$: le lemme permet effectivement de dire que la somme des inverses de ses n racines (dans C) y_i est 1/10.
"Resterait" à montrer que lorsque n tend vers +infini, les y_i "approximent" les x_n^2...

<u>Remarque</u>
Il est facile de voir que si dans le lemme, on remplace le polynôme P par la somme d'une série entière on arrive à des absurdités :

par exemple, pour tout z dans C, $\exp(z)=1+z+z^2/2!+z^3/3!+\ldots$, et donc si on applique le lemme, la somme des inverses des z (dans C) tels que $\exp(z)=0$ serait -1, alors qu'évidemment, une exponentielle n'est jamais nulle.
Autre exemple : la fonction $(1-2z)/(1-z)=1-z-z^2-z^3\ldots$(pour $|z|<1$), aurait, si on applique le lemme, $-(-1)/1=1$ comme somme des inverses de ses zéros, alors que la seule valeur (dans C) l'annulant est 1/2 ; on pourrait m'objecter qu'il y a peut-être lieu de considérer le prolongement analytique de cette fonction et de voir ce que donne alors le lemme...

[8]

Un résultat qui servira pour une preuve de S=1/10 :

Soit a un réel et (F) l'équation, <u>dans C</u>, tan(z)=az :

- **si $a\geq1$ ou $a\leq0$, alors (F) n'a que des solutions réelles**
- **si $0<a<1$, alors (F) posséde, outre des solutions réelles, deux solutions non réelles qui sont imaginaires pures opposées**

Là aussi, une simple représentation graphique permet de voir tout de suite que (F) admet toujours une infinité de solutions réelles.

$z=x+iy$ avec x et y réels : $\tan(z)= \tan(x+iy)=\sin(2x)/D+i\,\mathrm{sh}(2y)/D$, avec $D=\cos(2x)+\mathrm{ch}(2y)$, pour $(x,y)\neq(\pi/2+k\pi,0)$, seules valeurs pour lesquelles tan(z) n'est pas défini.
Donc $\tan(z)=az$ équivaut à $\sin(2x)/D=ax$ et $\mathrm{sh}(2y)/D=ay$
Si x et y ne sont pas nuls, ces deux conditions entraînent $\sin(2x)/(2x)=\mathrm{sh}(2y)/(2y)$.

Mais
- pour u non nul, $\sin(u)/u<1$ ($d(u)=\sin(u)-u$ est strictement décroissante sur R et $d(0)=0$)
- pour u non nul, $\mathrm{sh}(u)/u>1$ ($d(u)=\mathrm{sh}(u)-u$ est strictement croissante sur R et $d(0)=0$)

Donc si x et y sont non nuls, $\sin(2x)/(2x)<1$ et $\mathrm{sh}(2y)/(2y)>1$ et on n'a pas $\sin(2x)/(2x)=\mathrm{sh}(2y)/(2y)$, d'où
s'il existe z tel que $\tan(z)=az$ alors $x=0$ (donc z est imaginaire pur) ou $y=0$ (z est réel).

Réciproquement, on a déjà vu que $\tan(x)=ax$ admet effectivement des solutions réelles (une infinité),
Mais l'équation (F) admet-elle des solutions imaginaires pures, c'est-àdire, existe-t-il des réels y tels que $\tan(iy)=iay$?
$\tan(iy)=\sin(iy)/\cos(iy)=(-1/i)\mathrm{sh}(y)/\mathrm{ch}(y)=i\,\mathrm{th}(y)$, et donc $\tan(iy)=iay$ équivaut à $\mathrm{th}(y)=ay$. On pouvait aussi dire, en uilisant l'équivalence ci-dessus, que $\tan(iy)=iay$ équivaut à $\mathrm{sh}(2y)/D=ay$, soit $\mathrm{sh}(2y)/(1+\mathrm{ch}(2y))=ay$, soit $2\mathrm{sh}(y)\mathrm{ch}(y)/(2(\mathrm{ch}(y))^2)=ay$.
La représentation graphique de $x\to\mathrm{th}(x)$ (fonction strictement croissante sur R, asymptotes $y=-1$ et $y=1$) et le fait que la pente à l'origine soit 1 ($\mathrm{th}'(x)=1/\mathrm{ch}^2(x)$) permet de voir tout de suite que cette représentation graphique est toujours coupée par la droite $y=ax$ au point (0,0), mais si $0<a<1$, et uniquement dans ce cas, il y a deux autres points d'intersection, d'abscisses opposées, ce qui donne dans ce cas les deux solutions imaginaires pures de l'équation $\tan(z)=az$.

Remarque : l'équation, dans C, $z\sin(z)+\cos(z)=0$ n'a que des solution réelles et aucune dans $]-\pi/2;\pi/2[$.

Ce résultat est utilisé dans la preuve du [3], et pour l'établir on utilise les idées ci-dessus.

Tout d'abord $z\sin(z)+\cos(z)=0 \Rightarrow z\neq0$ et $\cos(z)\neq0$ (car $\cos(z)=0 \Rightarrow z\sin(z)=0$ soit $z=0$ ou $\sin(z)=0$, conditions toutes les deux incompatibles avec $\cos(z)=0$).
Donc $z\sin(z)+\cos(z)=0 \Leftrightarrow \tan(z)=-1/z$, ce qui équivaut à (cf ci-dessus) $\sin(2x)/D=-x/(x^2+y^2)$ et $\mathrm{sh}(2y)/D=-y/(x^2+y^2)$, et ainsi, nécéssairement, si x et y ne sont pas nuls, on retrouve la condition $\sin(2x)/(2x)=\mathrm{sh}(2y)/(2y)$, laquelle ne peut être vérifiée si x et y sont non nuls (voir ci-dessus).
Donc nécessairement si $z=x+iy$ est une solution de $z\sin(z)+\cos(z)=0$, c'est que $x=0$ ou $y=0$ (pas tous les deux en même temps, puisque $z\neq0$).
Mais si $y=0$, l'équation s'écrit $\tan(x)=-1/x$ qui n'a pas de solution dans $]-\pi/2;\pi/2[$, puisque membre de gauche et de droite sont de signes contraires (mais il y a des solutions en dehors de cet intervalle : il suffit de faire un graphique pour s'en convaincre).
et si $x=0$, l'équation s'écrit $\mathrm{sh}(2y)/(1+\mathrm{ch}(2y))=\mathrm{th}(y)=-1/y$, qui n'a pas de solution, puisque membre de gauche et de droite sont de signes contraires pour tout y non nul.
Le résultat est donc prouvé.

[9]

Une preuve, compléte (du moins j'espère) **de S=1/10, par utilisation du théorème des résidus appliqué à la fonction $z\to\sin(z)/(z(\sin(z)-z\cos(z)))$**.

Rappelons l'énoncé de ce théorème :

> **Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert *O* de C sauf en en des points isolés qui sont des points singuliers pour f ; soit *K* un compact (dont le bord *F* est régulier), ne contenant, qu'un nombre fini de ces points singuliers $z_1,...z_p$, tous situés dans son intérieur :**
> **alors l'intégrale de f le long de *F*, prise dans le sens direct, est égale à 2iπ ($r_1+....+r_p$), où r_i est le résidu du point singulier z_i.**
>
> Note : le résidu en un point singulier s (pôle ou singularité essentielle) est le coefficient de 1/(z-s) dans le développement de Laurent au point s.

Posons **f(z)=sin(z)/(z(sin(z)-zcos(z))) ;** : c'est un quotient de fonctions holomorphes sur C, donc elle est holomorphe sur C, excepté là où le dénominateur est nul : ce dénominateur est nul pour z=0 ou sin(z)=zcos(z) ; mais l'équation sin(z)=zcos(z) équivaut à tan(z)=z (car cos (z) ne peut être nul, car sinon sin(z) serait aussi nul), dont les solutions sont uniquement les nombres réels x_n et $-x_n$ pour n≥1, cf le 1 et le 4, puisque par ailleurs la fonction tan est impaire.

Donc f est holomorphe sur C, excepté en ses pôles qui sont, outre 0, les x_n et $-x_n$ pour n≥1.
Notons que pour cos(z) non nul, f(z)=tan(z)/(z(tan(z)-z))=1/(tan(z)-z)+1/z.

Calcul des résidus.

- en 0 :

  au voisinage de 0, f(z)=1/(tan(z)-z)+1/z.
  Et comme au voisinage de 0, $\tan(z)=z+z^3/3+(2/15)z^5+...$,
  $1/(\tan(z)-z)=(3/z^3)(1/(1+(2/5)z^2)+...)=(3/z^3)(1-(2/5)z^2+...)=3/z^3-6/(5z)+k_1z+k_3z^3+....$,
  (il ne peut y avoir de terme constant, puisque la fonction considérée est impaire).
  et $f(z)=3/z^3-1/(5z)+k_1z+...$ (série de Laurent au voisinage de 0 : 0 est donc pôle d'ordre 3), et donc **le résidu en 0, pôle d'ordre 3, est -1/5**.

- en x_n

  au voisinage de x_n, on a encore f(z)=1/(tan(z)-z)+1/z
  x_n est un pôle puisque $\lim_{z\to x_n} f(z)=+\infty$; cherchons alors la limite en x_n de $(z-x_n)f(z)$, soit la limite en x_n de $g(z)=(z-x_n)/(\tan(z)-z)$: si cette limite est finie, x_n sera pôle simple de résidu cette limite.
  En notant ici x_n=a (donc tan(a)=a),
  et en posant z=a+h, $g(a+h)=h(1-a\times\tan(h))/((1+ah+a^2)(\tan(h))-h)=(1-a\times\tan(h))/(a^2+ah+...)$
  et donc le résidu étant la limite de g(a+h) lorsque h tend vers 0, est égal à $1/a^2$:
  x_n est pôle simple et son résidu est $1/x_n^2$.

- en $-x_n$
  le calcul ci-dessus prouve qu'en fait le résidu en a non nul et tel que cos(a) est non nul, est $1/a^2$: **le résidu en $-x_n$ est $1/x_n^2$**

La somme de "tous" les résidus est donc -1/5+2S : il 's'agit donc de montrer que cette somme est nulle.

Pour cela, pour $N\geq 2$, considérons le rectangle R_N dont les côtés sont paralléles aux axes : ceux paralléles à l'axe des abscisses sont portés par les droites $y=-N$ et $y=N$, ceux paralléles à l'axe des ordonnées sont portés par les droites $x=-N\pi$ et $x=N\pi$.
Notons F_N sa frontière, cad l'union des quatre côtés de R_N.

L'application du théorème des résidus donne (les pôles à l'intérieur du rectangle R_N sont uniquement 0 et les x_n et $-x_n$ situés entre $-N\pi$ et $N\pi$, et on se rappelle que x_n est entre $n\pi$ et $(n+1/2)\pi$)

$$-1/5+2(1/x_1^2+1/x_2^2+...+1/x_{N-1}^2)=I_N/(2i\pi),$$

I_N étant l'intégrale de f le long de F_N, intégrale prise dans le sens direct,
c'est-à-dire $I_N=\int_{F\_N} f(z)dz$

I_N est la somme des quatres intégrales de f le long des quatres côtés constituant F_N :
$I_N=I_1+I_2+I_3+I_4$

- soit I_1 l'intégrale de f le long du côté d'abscisse $N\pi$:
sur ce côté $z=N\pi+iy$, avec y dans $[-N;N]$; donc $\cos(z)$ n'est pas nul, et on peut écrire $f(z)=1/(\tan(z)-z)+1/z=\tan(z)/(z(\tan(z)-z))=ith(y)/((N\pi+iy)(-N\pi+i(th(y)-y))$.
$|f(z)|=|th(y)|/((N^2\pi^2+y^2)^{1/2}((N^2\pi^2+(th(y)-y)^2)^{1/2}\leq 1/(N\pi)(N\pi)=1/(N\pi)^2$.
Or la longueur de ce côté est 2N (ordonnée de -N à N), donc $|I_1|\leq 2N/(N\pi)^2=2/(N\pi^2)$, et donc $\mathbf{lim_{N->+\infty}\ I_1=0}$.

- Quant à I_3 l'intégrale de f le long du côté d'abscisse $-N\pi$, c'est I_1 car
$I_1=\int_{-N}^{N} f(N\pi+iy)idy$ et $I_3=\int_{N}^{-N} f(-N\pi+iy)idy$, et en changeant y en - y dans I_3, on retrouve I_1 puisque f est impaire.
Donc $\mathbf{lim_{N->+\infty}\ I_3=0}$

- soit I_2 l'intégrale de f le long du côté d'ordonnée N :
sur ce côté $z=x+iN$, avec x dans $[-N\pi;N\pi]$ (en fait x décrit cet intervalle du + vers le -, mais comme on va passer à la valeur absolue, cela n'a pas d'importance).
Là, la majoration va être plus diffcile à mettre en place.
On peut encore écrire $f(z)=\tan(z)/(z(\tan(z)-z))$.
$\tan(z)=\sin(x+iN)/\cos(x+iN)=(\sin(x)ch(N)+i\cos(x)sh(N))/(\cos(x)ch(N)-i\sin(x)sh(N))$, puisque $\sin(iN)=ish(N)$ et $\cos(iN)=ch(N)$.
En reportant cette valeur de tan(z) dans f(z), puis en divisant numérateur et dénominateur par cosh(N) on obtient :
$f(z)=(\sin(x)+i\cos(x)th(N))/((x+iN)T)$, avec
$T=\sin(x)-x\cos(x)-N\sin(x)th(N)+i(\cos(x)th(N)-N\cos(x)+x\sin(x)th(N))$.
Majorons, minorons
$|\sin(x)+i\cos(x)th(N)|\leq 1+1=2$
$|x+iN|>N$
$|T|^2=N^2(\sin^2(x)th^2(N)+\cos^2(x))-2Nth(N)(\sin^2(x)-x\cos(x)\sin(x)+\cos^2(x)+x\sin(x)\cos(x))+(\sin(x)-x\cos(x))^2+(\cos(x)+x\sin(x))^2th^2N$,
$|T|^2=N^2(th^2(N)+\cos^2(x)(1-th^2(N)))-2Nth(N)+(\sin(x)-x\cos(x))^2+(\cos(x)+x\sin(x))^2th^2N$
$|T|^2\geq N^2th^2(N)-2Nth(N)$, quantité positive pour N grand ,
puisque $\lim_{N->+\infty} th(N)=1$ (en fait c'est vérifié à partir de N=3).
Ainsi $|f(z)|\leq 2/(N(N^2th^2(N)-2Nth(N))^{1/2})$, et la longueur du côté considéré étant $2N\pi$, on a $|I_2|\leq 4N\pi/(N(N^2th^2(N)-2Nth(N))^{1/2})=4\pi/(N^2th^2(N)-2Nth(N))^{1/2}$, et donc $\mathbf{lim_{N->+\infty}\ I_2=0}$.

- Quant à I_4 l'intégrale de f le long du côté d'ordonnée -N, on a $I_4=I_2$ (tout comme $I_1=I_3$: voir plus haut) et donc **$\lim_{N\to+\infty} I_4=0$**.

Finalement $\lim_{N\to+\infty} I_N=0+0+0+0=0$, et ainsi $\lim_{N\to+\infty} -1/5+2(1/x_1^2+1/x_2^2+...+1/x_{N-1}^2)=0$, soit $\lim_{N\to+\infty} 1/x_1^2+1/x_2^2+...+1/x_{N-1}^2=1/10$, c'est-à-dire **S=1/10**.

Remarque : les majorations ci-dessus prouvent évidemment que $\lim_{N\to+\infty}\int_{F\_N} |f(z)|dz=0$.

[10]

u étant un réel quelconque donné on considère l'équation (E_u) tan(x)=ux, et on notera, pour n≥1, $x_{n,u}$ sa solution réelle dans]$(n-1/2)\pi$; $(n+1/2)\pi$[; bien entendu, $x_{n,1}=x_n$.

Il est clair (graphique...) que si u≤1, ces $x_{n,u}$, pour n≥1, sont toutes les solutions positives de (E_u) :
- si 0<u≤1, $x_{n,u}$ est dans]$n\pi$;$(n+1/2)\pi$[
- si u=0, $x_{n,u}=n\pi$
- si u<0, $x_{n,u}$ est dans]$(n-1/2)\pi$;$n\pi$[

Par contre si u>1, alors l'ensemble des solutions positives de (E_u) ne se limite pas à l'ensemble des $x_{n,u}$, pour n≥1, ($x_{n,u}$ est encore dans]$n\pi$;$(n+1/2)\pi$[) : **il y a une autre solution positive $x_{0,u}$ située dans]0;π/2[.**

On va démontrer ici que si u≤0 ou si u>1,
la somme des inverses des carrés des solutions positives de l'équation (E_u) tan(x)=ux est (3u-1)/(6(u-1)), c'est-à-dire

- **si u≤0, alors $\sum_{n\geq1}1/x_{n,u}^2=(3u-1)/(6(u-1))$**
- **si u>1, alors $\sum_{n\geq0}1/x_{n,u}^2=(3u-1)/(6(u-1))$**

Le lecteur aura tout de suite vérifié que la formule pour u=0 est effectivement vraie (voir remarque du [6]), et qu'évidemment on ne peut faire u=1 dans cette formule.

Pour prouver cela, je vais utiliser un ensemble de 4 résultats, regroupés sous l'étiquette Sturm-Liouville (la méthode du [9] devrait pouvoir s'appliquer en adaptant la fonction f, mais bon il faut varier les plaisirs...) : je me contenterai d'énoncer ces résultats sans démonstration, mais quelques références seront données.

Résultats sur Sturm-Liouville

- **1)** Soit l'équation différentielle (sur [a;b]) y''-q(x)y=0, q continue sur [a;b] et (h_1, k_1), (h_2, k_2) deux couples de réels distincts de (0,0).
  On se place dans un cas où cette équation différentielle admet deux solutions u_1 et u_2 linéairement indépendantes telles que
  - $h_1u_1(a)+k_1u'_1(a)=0$
  - $h_2u_2(b)+k_2u'_2(b)=0$

  Soit d la constante $u_1(x)u'_2(x)-u'_1(x)u_2(x)$ et K(t,x) la fonction (de Green) définie sur [a;b]×[a;b] par $K(t,x)=(-1/d)u_1(\min(x,t))u_2(\max(x,t))$.
  K est continue sur [a;b]×[a;b] et K(t,x)=K(x,t).

- **2)** Soit f une fonction continue sur [a;b] :

y vérifie, sur [a;b], y''-q(x)y=f(x)	<=>	$y(x)=-\int_a^b K(t,x)f(t)dt$, pour x dans [a;b]

et les 2 conditions ▪ $h_1y(a)+k_1y'(a)=0$ ▪ $h_2y(b)+k_2y'(b)=0$		

- **3)** Soit H l'espace de Hilbert constitué des fonctions de [a;b] dans R de carré sommable sur [a;b], muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)dt$.

  L'opérateur U qui à f de H fait correspondre la fonction U(f) définie, pour x dans [a;b], par $U(f)(x)=\int_a^b K(t,x)f(t)dt$, est un opérateur linéaire, compact, auto-adjoint de H dans H.
  Rappelons que compact signifie que l'image de la boule unité par U est précompacte (ou relativement compacte, les deux choses étant équivalentes puisque H est un complet) et qu'auto-adjoint signifie $\langle f,U(g)\rangle= \langle U(f),g\rangle$ pour tout f et g de H.
  Il est facile de vérifier ce dernier aspect, car, f et g étant dans H,
  $\langle f,U(g)\rangle=\int_a^b f(x)U(g)(x)dx=\int_a^b \int_a^b K(t,x)g(t)f(x)dtdx$,
  et
  $\langle U(f),g\rangle=\int_a^b U(f)(x)g(x)dx =\int_a^b \int_a^b K(t,x)f(t)g(x)dtdx=\int_a^b \int_a^b K(x,t)f(x)g(t)dxdt$
  et comme $K(t,x)=K(x,t)$, on a bien $\langle f,U(g)\rangle=\langle U(f),g\rangle$.

  Les valeurs propres de U sont non nulles, et elles sont caractérisées par

r est valeur propre de U	$\Leftrightarrow$	il existe une fonction h de H, non nulle, telle que ▪ $h''(x)+(1/r-q(x))h(x)=0$, pour x dans [a;b] ▪ $h_1h(a)+k_1h'(a)=0$ ▪ $h_2h(b)+k_2h'(b)=0$ (h sera alors un vecteur propre associé à la valeur propre r).

  Remarque : le 3) est une conséquence immédiate du 2).

  Note : pour 1), 2), 3) voir l'ouvrage Eléments d'analyse, Fondements de l'analyse moderne de J.Dieudonné (chapitre 11, du moins pour mon édition de 1972) et le Cours de mathématiques, tome III, de J.Bass (4ième partie, du moins pour mon édition de 1971) ;

- **4)** Soit U un opérateur de H dans H linéaire, compact et auto-adjoint :

  - 1) ses valeurs propres, r_i, sont réelles, tout espace propre est de dimension finie, les espaces propres correspondant à deux valeurs propres distinctes sont orthogonaux, et on peut ordonner les valeurs propres ansi :
    $|r_1|\geq|r_2|$.... et la suite r_i converge vers 0.

  - 2) Soit *B* une base orthonormée de H : e_1, e_2,....

    Soit A la "matrice" représentant U dans cette base : $a_{i,j}=\langle U(e_j),e_i\rangle$.

    - Si la série double $a_{i,j}^2$ converge, de somme T_2, alors la série r_i^2 converge et sa somme est aussi T_2.

- Si la série $a_{i,i}$ converge, de somme T_1, et si toutes les valeurs propres sont de même signe alors la série r_i converge et sa somme est aussi T_1 : c'est-à-dire, **trace(A)=la somme des valeurs propres**.

Remarque 1 : les valeurs propres étant de même signe on peut utiliser le fait qu'une série double à termes positifs est, lorsqu'elle converge, commutativement convergente.

Remarque 2 : dans le cas où U est de la forme définie au 3), alors,

- $T_1=\int_a^b K(t,t)dt$ (si on a l'hypothèse supplémentaire de positivité de U, cad <f,U(f)> est positif ou nul pour f quelconque dans H, cela d'après la photocopie d'un ouvrage dont je n'ai plus la référence)
- $T_2=\int_a^b \int_a^b |K(t,x)|^2 dtdx$ (ouvrage de J.Bass cité plus haut)

  note : je n'utiliserai pas ces deux résultats, mais le 1er sera vérifié sur l'exemple considéré ci-après.

Application de ces quatre résultats :

- on prend $[a;b]=[0;1]$, $q(x)=0$, $h_1=1$, $k_1=u$, $h_2=1$, $k_2=0$.

  Donc les u_i, sont des fonctions affines et on trouve toute de suite, à des constantes multiplicatives près que

- $u_1(x)=x-u$, $u_2=x-1$: elles seront indépendantes si et seulement si $d(x)=u_1(x)u'_2(x)-u'_1(x)u_2(x)$ $=-u+1$ est non nul, soit si et seulement si **u est distinct de 1**, ce que l'on supposera dans toute la suite.
  On a alors $d=-u+1$.

  Puis la fonction **K** est définie par

  si $0\leq x\leq t\leq 1$, $K(t,x)=(t-1)(x-u)/(u-1)$

  si $0\leq t\leq x\leq 1$, $K(t,x)=(x-1)(t-u)/(u-1)$

- U est donc l'opérateur de H dans H transformant la fonction f en la fonction U(f) définie par $U(f)(x)=\int_0^1 K(t,x)f(t)dt$

- Il s'agit maintenant de trouver les valeurs propres de U (c'est là que l'équation $\tan(x)=ux$ va apparaître).

  D'après le résultat n°3 de Sturm-Liouville,
  r est valeur propre de U équivaut à r non nulle et il existe une fonction h non nulle telle que $h''+h/r=0$ (sur [0;1]) et $h(0)+uh'(0)=0$ et $h(1)=0$.

  A priori, il faut envisager deux cas : $r<0$ et $r>0$.

  - si $r<0$

    $r=-1/t^2$ avec $t>0$, donc $h''-t^2h=0$, $h(x)=ach(tx)+bsh(tx)$ et les conditions aux bornes donnent le systéme d'inconnue (a,b)

$a+utb=0$
$ach(t)+bsh(t)=0$

Ce systéme aura une solution non triviale si et seulement si son déterminant est nul soit $sh(t)-utch(t)=0$, donc (la fonction ch n'est jamais nulle sur R) si et seulement si $th(t)=ut$.
On voit clairement en utilisant la représentation graphique de la fonction impaire th (la pente de la tangente à l'origine est 1, et la courbe, pour les abscisses positives est sous cette tangente) que si $u \leq 0$ ou si $u \geq 1$, la seule solution de $th(t)=ut$ est $t=0$, qui ne peut convenir, par contre **si $0<u<1$**, l'équation $th(t)=ut$ admet deux solutions opposés; t_0 et $-t_0$ et donc, **U admet une valeur propre négative $r_0=-1/t_0^2$**.

- si $r>0$

  $r=1/t^2$ avec $t>0$, donc $h''+t^2h=0$, $h(x)=acos(tx)+bsin(tx)$ et les conditions aux bornes donnent le systéme d'inconnue (a,b)

  $a+utb=0$
  $acos(t)+bsin(t)=0$

  Ce systéme aura une solution non triviale si et seulement si son déterminant est nul soit $sin(t)-utcos(t)=0$, donc ($cos(t)$ ne peut être nul car alors $sin(t)$ serait aussi nul) si et seulement si $tan(t)=ut$.
  Donc les valeurs propres positives de U sont les inverses des carré des solutions positives de l'équation (E_u) $tan(t)=ut$.

En conclusion

- si $u \leq 0$ ou si $u>1$

  les valeurs propres de U sont toutes positives : ce sont les inverses des carrés des solutions positives de l'équation (E_u) $tan(x)=ux$

- si $0<u<1$

  outre les valeurs propres positives ci-dessus, U admet une valeur propre négative $-1/t_0^2$, avec t_0, la solution positive de $th(x)=ux$.

- Dans le cas $u \leq 0$ ou $u>1$, toutes les valeurs propres de u étant de même signe on va utiliser le résultat du n°4 de Sturm-Liouville suivant : la somme des valeurs propres de U est la trace d'une représentation matricielle $A=(a_{i,j})$, sous réserve que la série $a_{i,i}$ converge.
  - on prend comme base orthonormée de H, les fonctions $e_n=2^{1/2}sin(n\pi x)$, pour $n \geq 1$
  - $U(e_n)(x)=\int_0^1 K(t,x)e_n(t)dt=\int_0^x ((t-u)(x-1)2^{1/2}sin(n\pi t)/(u-1))dt+\int_x^1 ((u-1)(x-u)2^{1/2}sin(n\pi t)/(u-1))dt$.
    Après calculs ... on trouve
    $U(e_n)(x)=e_n(x)/(n\pi)^2-2^{1/2}u(x-1)/(n(u-1)\pi)$
  - $a_{n,n}=<U(e_n),e_n>=\int_0^1 U(e_n)(x)e_n(x)dx=(1/n\pi)^2\int_0^1 e_n^2(x)dx-(2^{1/2}u/(n(u-1)\pi))\int_0^1 (x-1)2^{1/2}sin(n\pi x)dx$.
    Après calculs ... on trouve
    $\mathbf{a_{n,n}=(1/n\pi)^2(3u-1)/(u-1)}$.

    La série $a_{n,n}$ est donc convergente, et $trace(A)=(3u-1)/(6(u-1))$, cf $zéta(2)=\pi^2/6$, et ainsi **la somme des valeurs propres de U est $(3u-1)/(6(u-1))$**.

Remarque : le lecteur peut vérifier que $\int_0^1 K(t,t)dt=(3u-1)/(6(u-1))$: voir remarque 2 du n°4 de Sturm-Liouville.

Finalement on a prouvé que **si $u\leq 0$ ou si $u>1$, alors la somme des inverses des carrés des solutions positives de l'équation (E_u) $\tan(x)=ux$ est $(3u-1)/(6(u-1))$**, ce qui prouve le résultat annoncé.

[11] Une 2ième preuve de S=1/10, par utilisation du [10], c'est-à-dire par utilisation de Sturm-Liouville.

Le lecteur aura évidemment remarqué que le résultat obtenu au [10] sur la somme des carrés des inverses des solutions positives de l'équation $\tan(x)=ux$ ayant été obtenu pour $u\leq 0$ ou $u>1$, on ne peut pas l'appliquer dans le cas $u=1$; d'ailleurs on obtiendrait tout de suite une impossibilité cf la division par $u-1$.
Par contre on va regarder ce qui se passe lorsque u tend vers 1 par valeurs supérieures.

- n étant fixé (≥ 1), sur $]0;+\infty[$ la fonction $u\to x_{n,u}$ est continue (voir début du [10] pour la définition de $x_{n,u}$).
  En étudiant le sens de variation de $d(x)=\tan(x)-ux$ sur $]n\pi;(n+1/2)\pi[$ (si $u\leq 1$, d est croissante, si $u>1$, d est d'abord décroissante puis croissante et $d(n\pi)=-un\pi<0$), on voit tout de suite que $d(x)$ est d'abord négatif, puis s'annule pour $x_{n,u}$, puis est positif.
  Donc si $v>u>0$, alors $\tan(x_{n,v})=vx_{n,v}>ux_{n,v}$, donc $x_{n,v}>x_{n,u}$.
  Le théorème de la limite monotone permet alors de dire que la fonction $u\to x_{n,u}$ est continue sur $]0;+\infty[$.
- Sur $]0;+\infty[$, la fonction T : $u\to\sum_{n\geq 1} 1/x_{n,u}^2$ est continue.
  Cela résulte de la continuité sur $]0;+\infty[$, de chaque fonction $u\to 1/x_{n,u}^2$, et du fait que la série $1/x_{n,u}^2$ converge normalement sur $]0;+\infty[$, puisqu'elle est majorée par la série $1/(n\pi)^2$.
- S=1/10
  Comme $\lim_{u\to 1+} T(u)=T(1)$ et que $T(1)=S$, il s'agit de prouver que $\lim_{u\to 1+} T(u)=1/10$.
  Pour $u>1$, cf le [10], $T(u)=(3u-1)/(6(u-1))-1/x_{0,u}^2$, avec $x_{0,u}$ la solution de $\tan(x)=ux$ dans $]0;\pi/2[$; tout la difficulté va être ici de préciser le comportement de $x_{0,u}$ lorsque u tend vers 1^+ : graphiquement on voit bien que $x_{0,u}$ tend alors vers 0, mais de quelle façon?

  Dans tout ce qui suit, pour des raisons de commodité pour la frappe en html, **$x_{0,u}$, la solution de $\tan(x)=ux$ dans $]0;\pi/2[$ sera notée s**.
  Pour u proche de 1, à savoir pour $1<u<4/\pi<\pi/2$, on a $\pi/4<1/u<1<\pi/2$, donc $\tan(1/u)>1=u\times 1/u$, et donc $s<1/u$ (cf $d(x)=\tan(x)-x<0$ pour $0<x<s$ et $d(x)>0$ pour $s<x<\pi/2$).
  s étant dans $]0;\pi/2[$, on a $s=\arctan(us)$, et comme $|us|=us<1$, on peut utiliser le développement en série entière de arctan (voir le [3]) :
  $s=us-(1/3)us+(1/5)(us)^5-(1/7)(us)^7+...$, soit $1-u=u^3s^2F(u)$, avec $F(u)=-1/3+(1/5)(us)^2-(1/7)(us)^4+....$
  F(u) est la somme d'une série alternée qui vérifie le "critère" (c'est l'intérêt d'utiliser arctan) et donc $-1/3+(1/5)(us)^2-(1/7)(us)^4<F(u)<-1/3+(1/5)(us)^2<-2/15$.
  D'où, 1ière chose, $|F(u)|>2/15$, ce qui donne $|1-u|/(u^3s^2)>2/15$, puis $(us)^2<15|1-u|/(2u)$, d'où $\lim_{u\to 1+}us=0$, et donc, ce qui était attendu, $\lim_{u\to 1+}s=\lim_{u\to 1+}(1/u)us=1\times 0=0$.
  Et maintenant de l'encadrement de F(u) on peut en déduire que $F(u)/(-1/3+(1/5)(us)^2)$ tend vers 1 lorsque u tend 1^+, donc $(1-u)/(s^2(-1/3+(1/5)(us)^2))$ est aussi équivalent à 1, c'est-à-dire $s^2(-1/3+(1/5)(us)^2)=(1-u)(1+e)$ avec $\lim_{u\to 1+}e=0$, ce qui permet de voir que

$\lim_{u->1+}s^2/(u-1)=3$; on retrouve évidemment $\lim_{u->1+}s=0$.
Cette dernière limite aurait pu s'obtenir avec un encadrement de F(u) moins précis que celui ci-dessus, mais, seule, cette limite est insuffisante pour pouvoir conclure.
Pour arriver à conclure, on va considérer, pour u proche de 1^+, la relation $s^2(-1/3+(1/5)(us)^2)=(1-u)(1+e)$ comme une équation du second degré en $\mathbf{Z=1/s^2}$: en effet, cette relation s'écrit $(1-u)(1+e)Z^2+Z/3-u^2/5=0$, ce qui donne, le discriminant $1/9+4u^2(1-u)(1+e)/5$ étant positif pour u proche de 1^+, deux possibilités pour Z :
$Z=(-1/3+(1/3)(1+36u^2(1-u)(1+e)/5)^{1/2})/(2(1-u)(1+e))$
ou
$Z=(-1/3-(1/3)(1+36u^2(1-u)(1+e)/5)^{1/2})/(2(1-u)(1+e))$,
possibilités qui sont de même signe, leur produit étant $-u^2/(5(1-u)(1+e))$, et pour u suffisamment proche de 1^+, 1+e sera positif.
La 1ière possibilité n'est pas acceptable car en développant en série entière la racine carrée ($(1+x)^{1/2}=1+(1/2)x+(1/2)(1/2-1)x^2/2+...$, pour $|x|<1$), on voit que lorsque u tend vers 1^+, cette possibilité tend vers (1/3)(18/5)/2=3/5, alors que Z doit tendre vers l'infini.
Donc, pour u suffisamment proche de 1^+, on a toujours
$Z=(-1/3-(1/3)(1+36u^2(1-u)(1+e)/5)^{1/2})/(2(1-u)(1+e))$.
Et en développant en série entière la racine carrée, on obtient
$Z=(-2/3-6u^2(1-u)(1+e)/5+(1-u)^2K_1(u))/(2(1-u)(1+e))$, où K_1 est une fonction ayant une limite finie en 1^+.
Soit $Z=[1/(3(u-1))](1-1+1/(1+e))-(3/5)u^2+(1-u)K_2(u)$, avec K_2 une (autre) fonction ayant une limite finie en 1^+, ce qui donne
$Z=1/(3(u-1))-e'/(3(u-1))-(3/5)u^2+(1-u)K_2(u)$, avec $e'=e/(1+e)$
Malheureusement pour conclure, il nous faut la limite de e'/(u-1), cad la limite de e/(u-1) : l'encadrement trouvé plus haut de F(u) va nous permettre de montrer que cette limite est -3.
En effet, de cet encadrement de F(u) on tire $1-(1/7)(us)^4/(-1/3+(1/5)(us)^2)>F(u)/(-1/3+(1/5)(us)^2)>1$, soit,
puisque $F(u)=(1-u)/(u^3s^2)$ et $-1/3+(1/5)(us)^2=(1-u)(1+e)/s^2$,
$1-(1/7)(us)^4/(-1/3+(1/5)(us)^2)>1/(u^3(1+e))>1$.
L'inégalité de droite donne (1+e est positif pour u suffisamment proche de 1^+)
$eu^3<1-u^3$, soit, $e/(1-u)>(1+u+u^2)/u^3$, et celle de gauche donne
$(u^3(1+e)-1)/(u^3(1+e))>(1/7)(us)^4/(-1/3+(1/5)(us)^2)$, soit $e/(1+e)>(1-u^3)/(u^3(1+e))+(1/7)(us)^4/(-1/3+(1/5)(us)^2)$, et en divisant tout par 1-u et en multipliant par 1+e, on obtient l'encadrement suivant de e/(1-u) :
$(1+u+u^2)/u^3<e/(1-u)<(1+u+u^2)/u^3+(1/7)(1+e)((us)^4/(1-u))/(-1/3+(1/5)(us)^2)$.
Comme on a vu plus haut que $\lim_{u->1+}s=0$ et $\lim_{u->1+}s^2/(u-1)=3$, on a $\lim_{u->1+}s^4(1-u)=0$, et ainsi, par le théorème des "gendarmes", $\lim_{u->1+}e/(1-u)=3$, ce qui donne $\lim_{u->1+}e'/(u-1)=-3$.
Et comme, pour u>1, $T(u)=(3u-1)/(6(u-1))-1/s^2=(3u-1)/(6(u-1))-1/(3(u-1))+e'/(3(u-1))+(3/5)u^2-(1-u)K_2(u)$, on obtient $T(u)=1/2+e'/(3(u-1))+(3/5)u^2-(1-u)K_2(u)$, et ainsi $\mathbf{\lim_{u->1+}T(u)=1/2-1+3/5+0=1/10}$. Cqfd

[12]

Les x_n, pour n≥1, étant toujours les solutions positives de l'équation (E) tan(x)=x, on a

- **$S_2=\sum_{n\geq 1} 1/x_n^2=1/10$;** rien de nouveau car il s'agit évidemment de la somme S étudiée précédemment.
- **$S_4=\sum_{n\geq 1} 1/x_n^4=1/350$**
- **$S_6=\sum_{n\geq 1} 1/x_n^6=1/7875$**
- **$S_8=\sum_{n\geq 1} 1/x_n^8=37/6063750$**
- **$S_{10}=\sum_{n\geq 1} 1/x_n^{10}=59/197071875$**

Ces résultats sont attribués à Rayleigh en 1874.

Ils se prouvent très simplement en reprenant la méthode du [9],
et **cela va d'ailleurs permettre de donner en fait la formule générale suivante :**
$S_{2n}=(-1/2)\times$le résidu en 0 de $f(z)/z^{2n-2}$, f étant la fonction définie au [9], cad
$f(z)=\sin(z)/(z(\sin(z)-z\cos(z)))$, laquelle vérifie $f(z)=1/(\tan(z)-z)+1/z$ pour $\cos(z)$ non nul.
On a vu que ses pôles sont 0 de résidu -1/5 et, pour $n\geq 1$, les x_n et $-x_n$, chacun de résidu $1/x_n^2$.

Si on divise f par z^2, ses pôles sont inchangés :

- 0 devient d'ordre 5, de résidu $r_{0,2}$, que l'on précisera plus loin
- x_n et $-x_n$ restent simples et ont chacun comme résidu $1/x_n^4$, puisque $\lim_{z\to x_n} (z-x_n)(f(z)/z^2)=\lim_{z\to x_n}(1/z^2)\times\lim_{z\to x_n}(z-x_n)f(z)=(1/x_n^2)\times(1/x_n^2)=1/x_n^4$, et la même chose pour $\lim_{z\to -x_n} (z+x_n)(f(z)/z^2)$.

En utilisant le même contour que celui du [9], on obtient

$$r_{0,2}+2(1/x_1^4+1/x_2^4+...+1/x_{N-1}^4)=I_{N,2}/(2i\pi)$$

$I_{N,2}$ étant l'intégrale de $f(z)/z^2$ le long de F_N, intégrale prise dans le sens direct.

Or sur F_N, $|z|=|N\pi+iy|$ ou $|x+iN|$, donc $|z|\geq N$, et ainsi
$|I_{N,2}|\leq(1/N^2)\int_{F_N} |f(z)|dz$; comme on a prouvé (voir remarque à la fin du [9]) que $\int_{F_N} |f(z)|dz$ a pour limite 0 lorsque N tend vers $+\infty$, il en est de même pour $I_{N,2}$ (la convergence vers 0 est même plus rapide), et ainsi $r_{0,2}+2S_4=0$, et donc **S_4 est l'opposé de la moitié du résidu en 0 de $f(z)/z^2$, tout comme $S_2=S$ est l'opposé de la moitié du résidu en 0 de $f(z)$!**

Il ne reste plus qu'à chercher le résidu $r_{0,2}$ en 0 de $f(z)/z^2$, qui est le coefficient de $1/z$ dans le développement en série de Laurent au voisinage de 0 de $f(z)/z^2$.

Pour cela on a besoin du développement en série de Laurent au voisinage de 0 de f(z) : c'est celui de $1/(\tan(z)-z)+1/z$) dont le début du développement a été vu au [9] pour trouver le résidu en 0 de f, mais là, il faut aller plus loin.
Grâce à Maple je trouve
$f(z)=3/z^3-1/(5z)-(1/175)z-(2/7875)z^3-(37/3031875)z^5-(118/197071875)z^7+...$.

D'où $r_{0,2}=-1/175$ et **$S_4=(-1/2)\times(-1/175)=1/350$**.

Et pour les autres sommes on procéde de la même façon en considérant successivement $f(z)/z^4$, $f(z)/z^6$....

En fait, **pour $n\geq 1$, $S_{2n}=(-1/2)\times$le résidu en 0 de $f(z)/z^{2n-2}$**, ce qui rend beaucoup moins "mystérieux" le résultat de Rayleigh.

Remarque : et si on divise f(z) par z, que se passe-t-il?
Dans ce cas, il n'y a pas de terme en 1/z dans le développement en série de Laurent de f(z)/z, donc le résidu en 0 est 0, et en fait les résidus de x_n et de $-x_n$, cette fois ne sont pas égaux mais opposés ($1/x_n^3$ et $-1/x_n^3$), et donc on obtient $0+0=I_{N,1}/(2i\pi)$, $I_{N,1}$ étant l'intégrale de f(z)/z le long de F_N, ce qui donne aucune information sur $\sum_{n\geq 1} 1/x_n^3$.
Evidemment, on peut vérifier qu'effectivement $I_{N,1}=0$: cela vient du fait que g(z)=f(z)/z est alors paire, et que l'intégration de g le long de F_N se fait toujours dans le même sens (direct), ainsi les intégrales sur deux côtés opposés de F_N sont opposées (alors que pour $f(z)/z^{2n-2}$, elles sont égales, la fonction étant alors impaire).
Par exemple, les intégrales $\int_{N\pi}^{-N\pi} g(x+iN)dx$ et $\int_{-N\pi}^{N\pi} g(x-iN)dx$ sont opposées (changer x en -x dans la 2ième).