<- Sommaire Site

ou sommaire sur les équations

Chapitre 8

Sur l'équation du 5ième degré

1) Réduction d'une équation du 5ième degré à une équation de la forme Bring-Jerrard, c'est-à-dire sans termes de degré 4 et 3 et 2.

Erland Bring (1736-1798) ; George Gerrard (1804-1863)

Vers le paragraphe 1

2) Un mot sur la fonction Bring-radical, pour résoudre les équations du 5ième degré.

Vers le paragraphe 2

3) Formules de résolution, par radicaux (usuels, en nombre fini), de $x^5+px+q=0$ lorsque cette équation est résoluble par radicaux.

Vers le paragraphe 3

4)Equation du 5ième degré et fonctions elliptiques.

Attention, ne pas attendre grand chose de ce paragraphe : je cite simplement quelques résultats sans aucune justification!

Vers le paragraphe 4

Nota 1 : *parmi les résultats annoncés dans les encadrés du début de chacun des trois premiers paragraphes, seuls trois ne sont pas démontrés :*

> *au 2.4 : l'existence du prolongement analytique de la fonction BR*
> *au 3.4 : la condition nécessaire pour que $P(X)=X^5+pX+q$ soit résoluble (une preuve de la condition suffisante est donnée)*
> *au 3.5 : comme ci-dessus, la preuve n'est faite que dans un sens*

...tout simplement parceque je ne sais pas faire! Si un lecteur a une idée...
Et aussi, dans le cadre de la preuve du 2.5, je détermine BR(i), mais uniquement au signe près de sa partie réelle ; cependant la connaissance exacte de BR(i) n'est pas indispensable pour prouver ce 2.5

Nota 2 : tous les polynômes (ou équations polynômiales) considérés ici ayant leurs coefficients dans C, dès qu'on parlera de leurs racines, il s'agira de leurs racines dans C.

Nota 3 : par ailleurs, il existe bien sûr des méthodes de calcul numérique permettant de déterminer des valeurs approchées (avec une "excellente" précision) des solutions de f(x)=0, en particulier pour f polynôme de degré 5, mais je ne m'intéresse pas ici, à cet aspect.

1) Réduction de l'équation (1) $x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, les coefficients a_i étant dans un sous-corps K de C, à l'équation (4) $t^5+pt+q=0$, p et q étant dans une extension par radicaux de K . (p et q s'obtiennent à partir des a_i, par résolutions notamment de deux équations de degré 2 et une équation de degré 3).

Preuve :

Comme dans l'annexe 2 on va utiliser la méthode de Tschirnhaus via les sommes de Newton :

Rappel sur les formules de Newton :

Soient x_0,x_1,x_2,x_3,x_4 les racines de l'équation (1)
on pose $S_{x,k}=x_0^k+x_1^k+x_2^k+x_3^k+x_4^k$
on a alors :

$S_{x,1}=-a_4$
$S_{x,2}=a_4^2-2a_3$
d'après $(\Sigma_{i=0;4}\, u_i)^2=\Sigma_{i=0;4}\, u_i^2+2\Sigma_{j>i}\, u_iu_j$
$S_{x,3}=-a_4^3+3a_3a_4-3a_2$
d'après (par exemple, par un calcul direct) :
$(\Sigma_{i=0;4}\, u_i)^3=\Sigma_{i=0;4}\, u_i^3+3\Sigma_{i\neq j}\, u_i^2u_j+6\Sigma_{k>j>i}\, u_iu_ju_k$
ce qui donne $S_{x,1}^3=S_{x,3}+3(S_{x,1}S_{x,2}-S_{x,3})-6a_2$

$S_{x,4}=a_4^4-4a_3a_4^2+2a_3^2+4a_2a_4-4a_1$

là un calcul direct est longuet. Il vaut mieux utiliser la formule :
pour $1<=k<=5$, $S_{x,k}+a_4S_{x,k-1}+a_3S_{x,k-2}+...+a_{6-k}S_{x,1}+ka_{5-k}=0$; le membre de gauche est toujours une somme de k+1 termes commencant par $S_{x,k}$ et finissant à ka_{5-k}.
On peut bien sûr l'utiliser pour k=1,2,3 et on retrouvera les résultats sur $S_{x,1}$,$S_{x,2}$,$S_{x,3}$.
Pour k=4 cela donne $S_{x,4}+a_4S_{x,3}+a_3S_{x,2}+a_2S_{x,1}+4a_1=0$, qui donne le résultat annoncé.
Et pour k=5 on a $S_{x,5}+a_4S_{x,4}+a_3S_{x,3}+a_2S_{x,2}+a_1S_{x,1}+5a_0=0$, (elle s'obtient aussi directement en remplacant dans (1) x successivement par les racines et en ajoutant membre à membre), ce qui donne

$S_{x,5}=-a_4^5+5(a_3a_4^3-a_2a_4^2-a_3^2a_4+a_1a_4-a_0+a_2a_3)$
$S_{x,5+p}+a_4S_{x,4+p}+a_3S_{x,3+p}+a_2S_{x,2+p}+a_1S_{x,1+p}+a_0S_{x,p}=0$ pour tout entier naturel p non nul.

on multiplie l'équation (1) par x^p et on y remplace successivement x par les racines et on ajoute membre à membre les cinq égalités obtenues.

Tous ces $S_{x,k}$ sont donc dans K.
Bien entendu $S_{x,k}$ ne peut être nul, que si au moins une des racines x_i est non réelle.

Réduction de l'équation (1) à l'équation (4) : elle va se faire en trois étapes

1ère étape

En posant $x=y-a_4/5$

l'équation (1) $x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$

se ramène immédiatement à

l'équation (2) $y^5+b_3y^3+b_2y^2+b_1y+b_0=0$, les b_i étant dans K.

2ième étape

On pose, pour i=0,1,2,3,4 $z_i=y_i^2+uy_i+v$ et on cherche u et v, dans une extension K' par radicaux de K, de façon que z_0,z_1,z_2,z_3,z_4 soient solutions de

l'équation (3) $z^5+p'z^2+q'z+r'=0$.

Bien entendu si $b_3=0$, alors (2) a la forme souhaitée (3).

On se place donc dans le cas $b_3\neq0$.

Pour avoir la forme (3) il faut et il suffit que $S_{z,1}=S_{z,2}=0$.
Notons que $S_{y,1}=0$, $S_{y,2}=-2b_3$, $S_{y,3}=-3b_2$, $S_{y,4}=2b_3^2-4b_1$.
En tenant compte de $S_{y,1}=0$ on a $S_{z,1}=S_{y,2}+5v$ et $S_{z,2}=S_{y,4}+u^2S_{y,2}+5v^2+2uS_{y,3}+2vS_{y,2}$
La condition $S_{z,1}=0$ donne $v=-S_{y,2}/5=2b_3/5$, et en reportant dans $S_{z,2}=0$, on obtient

$2b_3^2-4b_1-2b_3u^2+5\times4b_3^2/25+2(-3b_2)u+(4b_3/5)(-2b_3)=0$, soit
$b_3u^2+3b_2u-(3/5)b_3^2+2b_1=0$.
Comme $b_3\neq0$, on a une équation du second degré en u, et ainsi u s'obtient par radicaux : il est dans K' extension par radicaux de K.
u et v étant ainsi déterminés, $p'=-S_{z,3}/3$, $q'=-S_{z,4}/4$, $r'=-S_{z,5}/5$ sont aussi dans K', puisque $S_{z,3}$, $S_{z,4}$, $S_{z,5}$ sont des polynômes en $S_{y,k}$, lesquels sont dans K, et en u et v qui sont dans K'.

3ième étape

(d'après un article de Adamchik et Jeffrey, ACM SIGSAM Bulletin, vol 37, n°3, septembre 2003)

On pose, pour i=0,1,2,3,4 $t_i=z_i^4+az_i^3+bz_i^2+cz_i+d$ et on cherche a,b,c,d, dans une extension K'' par radicaux de K, de façon que t_0,t_1,t_2,t_3,t_4 soient solutions de

l'équation (4) $t^5+pt+q=0$.

Bien entendu si p'=0, l'équation (3) a la forme voulue (4).

On se place dans le cas $p'\neq0$.

Pour avoir la forme (4) il faut et il suffit que $S_{t,1}=S_{t,2}=S_{t,3}=0$.
Notons que : $S_{z,1}=S_{z,2}=0$, $S_{z,3}=-3p'$, $S_{z,4}=-4q'$, $S_{z,5}=-5r'$, $S_{z,6}=3p'^2$, $S_{z,7}=7p'q'$, $S_{z,8}=8p'r'+4q'^2$; puisque p',q',r' sont dans K' (extension par radicaux de K), tous ces $S_{z,k}$ sont aussi dans K'.
$S_{t,1}=S_{z,4}+aS_{z,3}+bS_{z,2}+cS_{z,1}+5d=-4q'-3p'a+5d$, puisque $S_{z,1}=0$.
Donc **$S_{t,1}=0$ équivaut à $d=(4q'+3p'a)/5$**.
$S_{t,2}=S_{z,8}+a^2S_{z,6}+b^2S_{z,4}+5d^2+2aS_{z,7}+2bS_{z,6}+2cS_{z,5}+2dS_{z,4}+2abS_{z,5}+2acS_{z,4}+2adS_{z,3}+2bcS_{z,3}$, cela compte-tenu de $S_{z,1}=S_{z,2}=0$.
Dans cette expression le coefficient de c est $2(S_{z,5}+aS_{z,4}+bS_{z,3})=2(-5r'-4q'a-3p'b)$; d'où en prenant **$b=-(5r'+4q'a)/(3p')$**, dans l'expression $S_{t,2}$ il n'y a plus que l'inconnue a, puisque c a disparu et par ailleurs b et d s'expriment en fonction de a.
Donc **$S_{t,2}=0$ donne une équation (E_a) d'inconnue a, de degré ≤2 : $Aa^2+Ba+C=0$** . En déduire que cette équation donne a par radicaux, est un pas que j'hésite à faire, du moins sans précaution, contrairement à ce que j'ai pu lire!
En effet pourquoi, dans cette équation (E_a), n'aurait-on pas A=B=0 et $C\neq0$? Ceci voudrait alors dire que cette équation, d'inconnue a, n'a pas de solution ; donc il serait impossible de se ramener (du moins par ce moyen) à la forme (4).
Précisons donc cette équation (E_a), pour voir ce qu'il en est exactement.
A$=S_{z,6}+(16/9)(q'/p')^2S_{z,4}+5\times(9/25)p'^2+2\times(-4q')/(3p')S_{z,5}+2\times(3p'/5)S_{z,3}$
$=3p'^2-(64/9)q'^3/(p'^2)+(9/5)p'^2+(40/3)q'r'/p'-(18/5)p'^2=(6/5)p'^2-(64/9)q'^3/(p'^2)+(40/3)q'r'/p'$
$=\mathbf{2(27p'^4-160q'^3+300p'q'r')/(45p'^2)}$

B$=(2\times5\times4\times r'q'/(9p'^2))S_{z,4}+5\times2\times4\times3\times q'p'/25+2S_{z,7}$
$+2\times(-4q'/(3p'))S_{z,6}+2\times(3p'/5)S_{z,4}+2\times(-5r'/(3p'))S_{z,5}+2\times(4q'/5)S_{z,3}$
$=-(160/9)(q'r'^2/p'^2)+(24/5)p'q'+14p'q'-8p'q'-(24/5)p'q'+(50/3)r'^2/p'-(24/5)p'q'$
$=-(160/9)(q'r'^2/p'^2)+(6/5)p'q'+(50/3)r'^2/p'$
$=\mathbf{2(27p'^3q'-400q'^2r'+375p'r'^2)/(45p'^2)}$

C$=S_{z,8}+(25/9)(r'^2/(p'^2))S_{z,4}+5\times(16/25)q'^2+2\times(-5/3)(r'/p')S_{z,6}+2\times(4/5)q'S_{z,4}$

$=8p'r'+4q'^2-(100/9)(r'^2q'/(p'^2))+(16/5)q'^2-10r'p'-(32/5)q'^2$
$=-2r'p'+(4/5)q'^2-(100/9)(r'^2q'/(p'^2))$
$=\mathbf{2(18p'^2q'^2-45p'^3r'-250q'r'^2)/(45p'^2)}$

A, B, C sont dans K' puisque p', q' , r' sont dans K'.

Montrons maintenant (c'est une preuve "personnelle") que cette équation (E_a) a effectivement toujours au moins une solution :
si $A\neq0$, elle est du second degré donc elle a deux solutions qui s'obtiennent par radicaux : elles sont dans K", extension par radicaux de K', donc extension par radicaux de K
si A=0 et $B\neq0$ elle a une seule solution dans K'
si A=B=0, là il y a problème : il faut savoir si C peut être nul ou pas? Montrons qu'en fait C est obligatoirement nul, ce qui ne me paraît pas évident du tout à priori :

> A=B=0 entraîne $27\, p'^4=q'(160q'^2-300p'r')$ et $27p'^3q'=r'(400q'^2-375p'r')$; puisque p' a été supposé non nul, q' et r' sont non nuls, et aussi $400q'^2-375p'r'$.
> On a donc $p'/q'=(q'/r')((160q'^2-300p'r')/(400q'^2-375p'r'))$, soit $p'r'(80q'^2-75p'r')=q'^2(32q'^2-60p'r')$.
> En posant $U=q'^2$ et $V=p'r'$, cette dernière égalité s'écrit $V(80U-75V)=U(32U-60V)$, soit $75(V/U)^2-140(V/U)+32=0$.
> Il n'y a donc que deux possibilités : soit V/U=4/15, soit V/U=24/15.
> Si V/U=4/15 on a $27p'^4=q'(160U-300V)=q'U(160-300\times4/15)=80q'^3$, donc $15p'r'=4q'^2$ et $27p'^4=80q'^3$; on en déduit que $45p'^2C=18p'^2q'^2-3p'^2(15p'r')-250q'r'^2$ $=18p'^2q'^2-3p'^2\times4q'^2-250q'(16q'^4/(225p'^2))=2q'^2(27p'^4-80q'^3)/(9p'^2)=0$!
> Si V/U=24/15 on a $27p'^4=q'(160U-300V)=q'U(160-300\times24/15)=-320q'^3$, donc $15p'r'=24q'^2$ et $27p'^4=-320q'^3$; on en déduit que $45p'^2C=18p'^2q'^2-3p'^2(15p'r')-250q'r'^2$ $=18p'^2q'^2-3p'^2\times24q'^2-250q'(576q'^4/(225p'^2))=-2q'^2(27p'^4+320q'^3)/(p'^2)=0$!
> Donc A=B=0 entraîne C=0.

conclusion : si A=B=0, alors l'équation (E_a) a une infinité de solutions : tous les éléments de K'!

A ce niveau, on a donc prouvé qu'il existe a,b,d (dans une extension K" par radicaux de K, K" pouvant être K') tels que $S_{t,1}=S_{t,2}=0$, cela quelque soit c.

Reste donc à voir si on peut trouver c tel que $S_{t,3}=0$. Cette condition s'écrit :
$\Sigma_{i=0 \text{ à } 4}(z_i^4+az_i^3+bz_i^2+cz_i+d)^3=0$; la seule inconnue étant c, on obtient une équation de degré 3, le coefficient de c^3 étant $S_{z,3}=-3p'$ qui est non nul (hypothèse faite plus haut).
Donc c s'obtient aussi par radicaux : c est dans une extension K'" par radicaux de K" (puisque a,b,d sont dans K" et les $S_{z,k}$ sont dans K', donc dans K"), et K'" est aussi une extension par radicaux de K.
Et $p=-S_{t,4}/4,q=-S_{t,5}/4$ sont aussi dans K'" car $S_{t,4}$ et $S_{t,5}$ sont des polynômes en $S_{z,k}$, lesquels sont dans K', et en a,b,d qui sont dans K", et en c qui est dans K'".

Ceci termine la preuve du 1)

<u>Remarque 1</u> : On notera que pour réaliser le passage de (1) à (4), il a fallu résoudre deux équations de degré 2 (une à la 2ième étape, une autre à la 3ième étape) et une équation de degré 3 à la 3ième étape.
<u>Remarque 2</u> : Ramener l'équation (1) directement à l'équation (3) $z^5+p'z^2+q'z+r'=0$, (c'est-à-dire

sauter la 1ère étape) en posant $z_i=x_i^2+ux_i+v$ n'est pas toujours possible, contrairement à ce que certains exposés peuvent laisser penser.

Cette fois $S_{z,1}=S_{x,2}+uS_{x,1}+5v$ et $S_{z,2}=S_{x,4}+u^2S_{x,2}+5v^2+2uS_{x,3}+2vS_{x,2}+2uvS_{x,1}$.

$S_{z,1}=0$ donne $v=-(S_{x,2}+uS_{x,1})/5$ et en reportant dans $S_{z,2}=0$ on obtient l'équation $Au^2+Bu+C=0$ avec

$A=S_{x,2}+5\times(1/25)S_{x,1}^2+2S_{x,1}(-1/5)S_{x,1}=S_{x,2}-(1/5)S_{x,1}^2$

$A=a_4^2-2a_3-(1/5)a_4^2=(4/5)a_4^2-2a_3$

$B=5\times(1/25)\times2S_{x,2}S_{x,1}+2S_{x,3}+2\times(-1/5)S_{x,1}S_{x,2}+2\times(-S_{x,2}/5)S_{x,1}=2S_{x,3}-(2/5)S_{x,2}S_{x,1}$

$B=-2a_4^3+6a_3a_4-6a_2-(2/5)(a_4^2-2a_3)(-a_4)=(-8/5)a_4^3+(26/5)a_3a_4-6a_2$

$C=S_{x,4}+5\times(1/25)S_{x,2}^2+2(-1/5)S_{x,2}S_{x,2}=S_{x,4}-(1/5)S_{x,2}^2$

$C=a_4^4-4a_3a_4^2+2a_3^2+4a_2a_4-4a_1-(1/5)(a_4^2-2a_3)^2=(4/5)a_4^4-(16/5)a_3a_4^2+(6/5)a_3^2+4a_2a_4-4a_1$

Prenons le cas $a_4=5$, $a_3=10$, $a_2=10$: on a alors $A=B=0$ et $C=20-4a_1$.

Donc pour tout $a_1\neq5$ on a $C\neq0$ et on ne peut pas trouver u tel que $S_{z,2}=0$: c'est-à-dire pour $a_4=5$, $a_3=10$, $a_2=10$, $a_1\neq5$, a_0 quelconque, on ne peut pas ramener l'équation (1) directement à (3) en posant $z_i=x_i^2+ux_i+v$!

Remarque 3 : pour la 3ième étape, si on avait posé pour i=0,1,2,3,4 $t_i=z_i^3+az_i^2+bz_i+c$ et cherché a,b et c de façon que t_0,t_1,t_2,t_3,t_4 soient solutions de l'équation (4) $t^5+pt+q=0$, on serait tombé sur une équation de degré 6, donc non résoluble par radicaux en général.

Remarque 4 : bien entendu, pour trouver les solutions de l'équation (1) à partir de celles (t_i) de l'équation (4), c'est assez sportif : il faut "remonter" les calculs.

Précisons :

1) il faut résoudre les cinq équations de degré 4 suivantes : $t_i=z^4+az^3+bz^2+cz+d$ et pour chacune voir laquelle, z_i, est solution de (3) ; en fait il suffit d'en résoudre quatre, car la somme des racines étant 0, si on connaît quatre racines, on a la 5ième.

2) il faut résoudre les cinq équations (en fait quatre) de degré 2 suivantes : $z_i=y^2+uz+v$ et pour chacune voir laquelle, y_i, est solution de (2).

3) les solutions de (1) sont alors les $y_i-a_4/5$!

2)

Lien vers la référence principale de ce paragraphe.

Exceptées les équations se ramenant à $x^5+q=0$, toute équation du 5ième degré dont les coefficients sont dans un sous-corps K de C, se ramène à une équation de la forme :

$$x^5-5x-4t=0, \text{ notée } (EF_t)$$

avec t dans une extension par radicaux de K (à partir de l'équation $x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$, t s'obtient par résolutions notamment de deux équations de degré 2, une équation de degré 3 et par une racine 4ième).

2.1) Les solutions de (EF_{-t}) sont les opposées de celles de (EF_t)
Les solutions de (EF_{it}) sont les solutions de (EF_t) multipliées par i.
Si t est réel, l'équation (EF_t) admet toujours au moins une solution réelle. Précisons ces solution réelles :

t<-1	t=-1	-1<t<1	t=1	1<t
une solution <-1	deux solutions 1 (double) l'autre est <-1	trois solutions une est <-1 une entre -1 et 1 l'autre >1	deux solutions -1 (double) l'autre est >1	une solution >1

Si t est réel, les solutions imaginaires de (EF_t) "vont" par deux : si a+ib est solution, alors a-ib est aussi solution (a et b réels, b non nul)
Si t est imaginaire pur, les solutions imaginaires de (EF_t) "vont" par deux : si a+ib est solution alors -a+ib est aussi solution (a et b réels, b non nul)

2.2) (EF_t) a une solution (au moins) double si et seulement si $t^4=1$ (auquel cas il y a trois solutions simples et une qui est double).

Remarque : le discriminant de $X^5-5X-4t$ est $800000(t^4-1)$.

2.3) Pour $t\in[-1;+\infty[$, on note BR(t) la plus grande solution réelle de (EF_t) :
$BR(t)\geq1$ et la fonction t->BR(t) est une fonction strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.
La fonction BR est la fonction Bring-radical ou ...pourquoi pas, la fonction racine de Bring.

t	-1	0	1	2	3	57
BR(t)	1	$5^{1/4}\cong1{,}49$	$\cong1{,}65$	$\cong1{,}76$	$\cong1{,}84$	3

2.4) Cette fonction BR, définie au départ que sur $[-1;+\infty[$, se prolonge analytiquement à tout C (ce point ne sera pas prouvé ici), BR(t) étant pour tout t dans C une solution de (EF_t).
La fonction BR ne s'annulle jamais.
Pour tout t dans C, le conjugué de BR(t) est BR(conjugué de t).
pour tout t réel, BR(t) est la plus grande solution réelle de (EF_t).
Par exemple, pour $|t-57|<58$ et $t\in C$ on a
$BR(t)=3+(1/100)(t-57)-(27/(4\times10^5))(t-57)^2+(549/(8\times10^8))(t-57)^3+...$

2.5) Pour tout t dans C, les cinq solutions de (EF_t) sont
BR(t), -BR(-t), -iBR(it), iBR(-it) et l'opposée de la somme des quatres précédentes.

2.6) "Essai" d'application à $x^5-x-2=0$: pas très concluant d'un point de vue pratique.

Preuves :

D'après le 1) toute équation du 5ième degré se ramène à $x^5+px+q=0$, p et q étant dans une extension radicale de K.
En prenant pour u une racine 4ième de -p/5, si on pose $-4t=q/u^5$ et z=x/u, alors en divisant $x^5+px+q=0$ par u^5, on voit tout de suite que z vérifie $z^5-5z-4t=0$.
On notera que ce changement d'inconnue suppose p non nul : en fait si p=0, l'équation de départ est $x^5+q=0$, qui ne pose aucun problème, puisque ses solutions sont les racines 5ièmes de q.

preuve du 2.1
Evident pour les quatre premiers aspects
Précisons quelques points pour le 3ième aspect.
t étant réel, le polynôme $P_t(x)=x^5-5x-4t$ a ses coefficients tous réels et son degré est impair et ainsi ses limites +infini et -infini sont +infini et -infini, donc il a au moins une racine réelle.
Pour le détail des différents cas, il suffit de faire le tableau de variation de P_t : il y a un maximum local en -1 de valeur $P_t(-1)=4(1-t)$ et un minimum local en 1 de valeur $P_t(1)=-4(1+t)$; on a toujours $P_t(-1)>P_t(1)$.
En fait, on passe de la courbe représentative de P_t à celle de $P_{t'}$ par la translation de vecteur 4(t-t')j, (j étant bien sûr le vecteur unitaire de l'axe des ordonnées).
Par ailleurs $x^5-5x+4=(x^3+2x^2+3x+4)(x-1)^2$ et $x^5-5x-4=(x^3-2x^2+3x-4)(x+1)^2$.
Pour le 5ième aspect...on combine le 2ième et 4ième aspect.

preuve du 2.2
L'équation (EF_t) aura une racine au moins double si et seulement si le discriminant D de P(X) $=X^5-5X-4t$ est nul.
$D=(-1)^{5(5-1)/2}$Résultant(P,P')/1=Résultant(P,P')=déterminant de Sylvester de P et P' (voir commentaire sur le discriminant au chapitre 3).
Ce déterminant de Sylvester est :

$$\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4t & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4t & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0 & -5 & -4t & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -5 & -4t \\
5 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -5
\end{matrix}$$

Il est égal à $800000(t^4-1)$, (Maple par exemple pour aller vite...).
note : **le discriminant de X^5+aX+b est $5^5b^4+4^4a^5$**, la formule pour le discriminant de X^n+aX+b étant $(-1)^{n(n-1)/2}(n^nb^{n-1}+(-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}a^n)$.

Bien sûr, c'était pour faire "joli" : car P a au moins une solution double ssi P et P' ont une solution commune!
Donc t doit être tel qu'il existe x vérifiant $x^5-5x-4t=0$ et $5x^4-5=0$; donc $x^4=1$, puis en reportant dans la 1ière x-5x-4t=0, soit t=-x, et $t^4=1$!
Toujours est-il que l'équation (EF_t) a une solution au moins double ssi $t^4=1$, et alors cette solution est x=-t :

> soit t=-1, auquel cas 1 est solution double : $x^5-5x+4=(x^3+2x^2+3x+4)(x-1)^2$ (déjà vu au 2.1)
> les autres solutions étant approximativement -1,6506 ; -0,1746+1,5468i ; -0,1746-1,5468i

et en utilisant le 2.1 on en déduit

soit t=1, auquel cas -1 est solution double : $x^5-5x-4=(x^3-2x^2+3x-4)(x+1)^2$ (déjà vu au 2.1)
les autres solutions étant approximativement 1,6506 ; 0,1746+1,5468i ; 0,1746-1,5468i

soit t=-i, auquel cas i est solution double : $x^5-5x+4i=(x^3+2ix^2-3x-4i)(x-i)^2$
les autres solutions étant approximativement -1,6506i ; -1,5468-0,1746i ; 1,5468-0,1746i

soit t=i, auquel cas -i est solution double : $x^5-5x-4i=(x^3-2ix^2-3x+4i)(x+i)^2$
les autres solutions étant approximativement 1,6506i ; -1,5468+0,1746i ; 1,5468+0,1746i

<u>preuve du 2.3</u>
D'après le 2.1, pour tout réel $t\geq-1$, l'équation (EF_t) admet bien, au moins, une solution réelle dans $[1;+\infty[$, cette solution est égale à 1 ssi t=-1 ;
<u>on note BR(t) la plus grande de ces solutions réelles.</u>
<u>Par exemple</u> BR(-1)=1, $BR(0)=5^{1/4}\cong1,49$ (dans ce cas l'équation est $x^5-5x=0$ qui a trois racines réelles $-5^{1/4}$, 0, $5^{1/4}$ et deux solutions imaginaires $-5^{1/4}i$ et $5^{1/4}i$), $BR(1)\cong1,65$ (voir preuve du 2.2).
On a aussi $BR(2)\cong1,76$, $BR(3)\cong1,84$ et BR(57)=3.

Montrons que cette fonction BR est strictement croissante sur $[-1;+\infty[$.
Soit x=BR(t), x'=BR(t') avec $t'>t\geq-1$:
de $x'^5-x^5-5(x'-x)=4(t'-t)$, on tire $(x'-x)y=4(t'-t)$ avec $y=x'^4+x'^3x+x'^2x^2+x'x^3+x^4-5$; comme $x\geq1$ et x'>1 (car t'>-1) on a y>1+1+1+1+1-5=0 et ainsi x'-x et t'-t sont de même signe, soit x'-x>0, soit BR (t')>BR(t) lorsque t'>t.

<u>preuve du 2.4</u>
Là c'est une autre paire de manches.

Rappelons cependant ce qu'est une fonction analytique de U (ouvert de C) dans C : c'est une fonction qui est développable en série entière au voisinage de tout z_0 de U.

Une propriété capitale : une fonction analytique de U (ouvert connexe de C) dans C non identiquement nulle sur U a tous ses zéros qui sont isolés.

Et donc si la fonction BR, définie sur $[-1;+\infty[$ admet un prolongement analytique sur C, ce prolongement est unique : en effet s'il y en avait un autre, leur différence serait nulle sur $[-1;+\infty[$ et donc cette différence qui est aussi analytique sur C, n'aurait pas tous ses zéros isolés (ceux situés dans $[-1;+\infty[$), donc elle est nulle sur tout C.

Reste à prouver que cette fonction BR (définie sur $[-1;+\infty[$ pour l'instant) admet effectivement un prolongement analytique sur tout C : <u>nous admettrons l'existence d'un tel prolongement, noté encore BR</u>

Pour tout t dans C, BR(t) est une solution de (EF_t).
En effet, si on pose $f(t)=(BR(t))^5-5BR(t)-4$, f est analytique sur C ; or elle est nulle sur $[-1;+\infty[$, donc, toujours d'après le principe des zéros isolés f est nulle sur tout C.

On ne peut avoir BR(t)=0, car cela entraîne t=0 (puisque BR(t) est solution de (EF_t)), et $BR(0)\neq0$, donc contradiction.

Le fait que le conjugué de BR(t) soit BR(conjugué de t) résulte encore du principe des zéros isolés : principe de réflexion (perso : dossier 15 $pA8_0$). On retrouve alors le fait que si t est réel, (EF_t) admet au moins une solution réelle, puisque BR(t), qui en est une solution, est alors réel ; mais on a plus : en effet si t<-1, BR(t) est réel et est solution de (EF_t), donc BR(t) est alors la seule solution réelle de cette équation, et finalement, pour t réel, BR(t) est la plus grande solution réelle de (EF_t).

Vérifions les coefficients du développement donné en exemple au voisinage de 57.
Ce développement, au voisinage de 57, est nécessairement de la forme :
$BR(t)=BR(57)+BR'(57)(t-57)+(BR''(57)/2)(t-57)^2+(BR'''(57)/3!)(t-57)^3...$
BR(57)=3, puisque la plus grande solution réelle de $x^5-5x-228=0$ est 3 (c'est sa seule solution réelle , voir le 2.1).
Mais on a $(BR(t))^5-5BR(t)-4t=0$, au voisinage de 57 : on dérive!
$5(BR(t))^4BR'(t)-5BR'(t)-4=0$: on fait t=57 et $BR'(57)=4/(5\times3^4-5)=1/100$
on redérive :
$20(BR(t))^3(BR'(t))^2+5(BR(t))^4BR''(t)-5BR''(t)=0$: on fait t=57 et $BR''(57)=-20\times3^3\times(1/100)^2/(5\times3^4-5)=-27/200000$ et on a bien $BR''(57)/2=-27/(4\times10^5)$.
"etc"

Voici une preuve de ce développement, par application d'une formule d'inversion de Lagrange, celle que j'ai déjà utilisée dans ma page sur l'équation tan(x)=x, au [3].
Puisque pour t=57, z=3 est solution, par différence l'équation $x^5-5x-4t=0$ est équivalente à $z^5-3^5-4(t-57)=5(z-3)$.
Pour $z\neq3$, cela s'écrit $(z-3)((z^5-3^5)/(z-3)-5)=4(t-57)$.
En posant w=4(t-57), Z=z-3, on obtient pour $Z\neq0$, $Z(((Z+3)^5-3^5)/Z-5)=w$, soit $Z(Z^4+15Z^3+90Z^2+270Z+400)=w$, équation qui là est valide même pour Z=0!
Posons alors $f(Z)=1/(Z^4+15Z^3+90Z^2+270Z+400)$: dans un voisinage de 0, le dénominateur est proche de 400, donc non nul, donc cette fonction rationnelle est alors holomorphe sur ce voisinage de 0, et évidemment $f(0)\neq0$.
On applique alors le théorème d'inversion de Lagrange (on travaille bien sûr dans C) :

- il existe r>0 tel que $|Z|\leq r$ entraîne $|f(Z)|<2|f(0)|$, et alors pour tout w tel que $|w|<r/(2|f(0)|)$, **l'équation wf(Z)=Z a une seule solution Z(w)=z(w)-2 dans D(0,r)** telle que
- Z(w) soit développable en série entière de w dans D(0,r/(2|f(0)|) :
  $Z(w)=\sum_{n\geq1}a_nw^n$, avec $n!a_n$=la dérivée (n-1) ième de $(f(Z))^n$ prise en Z=0
  $a_1=f(0)$, $a_2=f(0)f'(0)$, $a_3=f(0)(f'(0))^2+(f(0))^2f''(0)/2$
- On remarque que si w=0 alors Z(0)=0 et si $w\neq0$ alors $Z(w)\neq0$ (puisque $f(0)\neq0$).

On peut maintenant remonter à l'équation (EF_t) sans difficulté (il faut cependant faire attention au cas w=0, car alors Z(0)=0, donc z(0)=3, et plus haut une division par z-3 a été faite ; voir Résidus page R62 pour ce point) :

pour |t-57|<r/(8|f(0)|, (EF_t) a une et une seule solution z(w)=Z(w)+3 dans D(3,r), solution que je note maintenant z(t) et qui pour |t-57|<r/(8|f(0)| est développable en série entière : $\mathbf{z(t)=3+\sum_{n\geq1}4^na_n(t-57)^n}$.
Le calcul des premières dérivées de f n'est pas trop difficile, et on trouve

- $a_1=1/400$
- $a_2=(1/400)\times(-270/400^2)=-27/(64\times10^5)$

- $a_3=(1/400)\times(270^2/400^4)+(1/2)\times(1/400^2)\times(-(180\times400^2-270\times2\times400\times270)/400^4)=549/(512\times10^8)$

et donc
$z(t)=3+(1/100)(t-57)-(27/(4\times10^5))(t-57)^2+(549/(8\times10^8))(t-57)^3+...$
Essayons de préciser le domaine de convergence en t qui est cf ci-dessus, "au moins", le disque D $(57,r/(8|f(0)|))=D(57,50r)$: il faut trouver r assurant que $|Z|\leq r$ entraîne $|f(Z)|<2|f(0)|$ <=> $|Z^4+15Z^3+90Z^2+270Z+400|>200$.
Posons $a=Z^4+15Z^3+90Z^2+270Z$, $b=400$: on a alors $|a+b|\geq||a|-|b||=||a|-400|$ et $|a|\leq r(r^3+15r^2+90r+270)$.
En prenant r=0.6, on obtient $|a|\leq197$, donc $||a|-400|=400-|a|\geq203$, donc $|a+b|>200$ et on peut prendre r=0.6 , ce qui donne **comme disque de convergence, "au moins", D(57,30)**.
Le lecteur aura évidemment remarqué que l'énoncé annonce D(57,58) et non D(57,30) : je coince pour arriver à ce 58...

Un contrôle pour t=57+i, donne comme somme des trois premiers termes de ce développement en série entière le complexe $3.0001+9.9993\times10^{-3}i$, qui est bien une "bonne" valeur approchée d'une solution de (EF_{57+i}).

<u>preuve du 2.5</u>
Puisque BR(t) est une solution de (EF_t), alors d'après le 2.1 on peut dire que
-BR(-t) est aussi une solution (puisque BR(-t) est l'opposée d'une solution de (EF_t))
-iBR(it) est aussi une solution (puisque BR(it) est une solution de (EF_t) multipliée par i et 1/i=-i)
iBR(-it) est aussi une solution (puisque BR(-it) est une solution de (EF_{-t}) multipliée par i, donc une solution de (EF_t) multipliée par -i)
Montrons que ces quatres solutions de (EF_t) sont distinctes.
Tout d'abord, montrons que pour deux quelconques de ces quatre racines, il y a toujours au moins une valeur de t pour laquelle elles sont distinctes :
BR(t)≠-BR(-t) pour t=1 (voir BR(1) et BR(-1) au 2.3)
BR(t)≠-iBR(it) pour t=-1 ou t=1

> en effet si BR(1)=-iBR(i) et BR(-1)=-iBR(-i), comme BR(i)=a+ib et BR(-i)=a-ib avec a et b réels on aurait BR(1)=b-ia et BR(-1)=-b-ia, soit 1,65...=b-ia et 1=-b-ia, ce qui est impossible.

BR(t)≠-iBR(-it) pour t=-1 ou t=1

> explication analogue au cas ci-dessus

De même pour les trois autres cas.
Donc si on prend deux quelconques de ces quatre solutions, leur différence d n'est pas identiquement nulle sur C ; comme d est analytique sur C, les zéros de d sont isolés.
C'est-à-dire si t' est un zéro de d, alors il existe un voisinage V(t') de t' tel que pour t dans V(t'), d (t) est non nul.
Considérons une suite t_n d'éléments de V(t') convergente vers t' :
cela veut dire que deux racines distinctes de (EF_{t_n}) deviennent confondues en t', et donc $(EF_{t'})$ a au moins une racine double, et ainsi $t'^4=1$.
Donc on peut déjà dire que si $t^4\neq1$, alors BR(t), -BR(-t), -iBR(it), iBR(it) sont quatre solutions distinctes de (EF_t) ; donc la cinquième racine est l'opposée de la somme de ces quatre racines (il n'y a pas de terme en x^4 dans l'équation).
On peut le vérifier pour t=0 : compte-tenu que $BR(0)=5^{1/4}$, BR(0), -BR(0), -iBR(0), iBR(0) sont

bien quatre racines distinctes de (EF_0), et l'opposée de leur somme est 0, qui est bien l'autre racine de (EF_0).
Reste à voir ce qui se passe pour $t^4=1$.
Si t=-1, les racines sont 1 (double), et (approximativement) -1,6506 ; -0,1746+1,5468i ; -0,1746-1,5468i.
Quant à BR(-1), -BR(1), -iBR(-i), iBR(i) qui sont quatres racines, les deux premières sont réelles (on a vu que BR(-1)=1 et BR(1)=1,65...), et les deux dernières sont imaginaires conjuguées (BR (i) et BR(-i) étant conjuguées d'après le 2.4) :
donc iBR(i) et -iBR(-i) ne peuvent être (approximativement) que -0,1746-1,5468i et -0,1746+1,5468i, à l'ordre près : ainsi BR(-1), BR(1), -iBR(-i), iBR(i) sont distinctes.
On peut vérifier que l'opposé de leur somme est 1, puisque la somme des cinq racines de (EF_{-1}) est 0 donc 2-1,6506...-2×0,17469...=0 et ainsi -(1-1,6506...-2×0,1746...)=1 : on retrouve bien que 1 est racine double.

> On déduit aussi de ces calculs que BR(i) est égal (approximativement) à -1,5468+0,1746i ou à 1,5468+0,1746i : <u>je ne sais pas comment savoir quelle est la bonne valeur</u> (voir NOTA 1 en début de page).

De façon analogue on a la même conclusion pour t=1,-i et i.

<u>preuve du 2.6</u> : application à $x^5-x-2=0$.
En posant $u=(1/5)^{1/4}$ et z=x/u, l'équation $x^5-x-2=0$ devient $z^5-5z-2\times 5^{5/4}=0$: on est ramené à (EF_t) avec $t=5^{5/4}/2\cong 3,7$.
D'après le 2.1 et le 2.3, cette équation a une seule solution réelle, qui est $BR(5^{5/4}/2)$; un calcul numérique montre que cette unique solution rélle est ≅1,8948.
Quant aux autres solutions, qui sont imaginaires, je ne vois pas comment le 2.5 peut les donner, <u>vu les connaissances (du moins, les miennes)</u> sur BR(z) pour z quelconque dans C!
En outre, si on était parti d'une équation du 5ième degré quelconque, trouver t aurait été très compliqué ; voir le paragraphe 1 pour la réduction à $x^5+px+q=0$.
<u>Donc, je me demande si cette fonction BR est vraiment d'une utilité pratique pour résoudre les équations du 5ième degré.</u>

Terminons par cette remarque : la seule solution réelle $x_0=(1/5)^{1/4}BR(5^{5/4}/2)\cong 1,2671$ de $x^5-x-2=0$ est la limite de la suite u_n, définie par $u_0=2^{1/5}$ et $u_{n+1}=(2+u_n)^{1/5}$; l'idée de considérer cette suite vient du fait que $x_0=(2+x_0)^{1/5}$.

Prouvons que cette suite converge effectivement vers x_0 :

> --on a toujours u_n dans $]0;x_0[$ (récurrence : pour $u_n>0$ c'est immédiat et, $u_0<x_0$ puis si $u_n<x_0$ alors $u_{n+1}<(2+x_0)^{1/5}=x_0$).
> --la suite est croissante : $u_{n+1}=(2+u_n)^{1/5}$ et u_n, qui sont positifs, sont rangés dans le même ordre que leur puissance 5ième, donc $u_{n+1}-u_n$ a même signe que $2+u_n-u_n^5$; un tableau de variation de $f(x)=2+x-x^5$ montre alors que f(x)>0 sur $]0;x_0[$, et ainsi $u_{n+1}-u_n>0$.
> En fait on peut éviter le recours au tableau de variation, car on sait que f(x)=0 a une seule solution réelle et f(0)=2>0, donc f ne peut être<0 sur $]0;x_0[$ car elle s'y annulerait une autre fois, ni nulle.
> --la suite est donc croissante et majorée : elle converge vers le réel l tel que $l=(2+l)^{1/5}$, donc $l^5-l-2=0$, soit $l=x_0$ (cette équation ayant une seule solution réelle).

Comme $u_1=(2+2^{1/5})^{1/5}$, $u_2=(2+(2+2^{1/5})^{1/5})^{1/5}$, $u_3=(2+(2+(2+2^{1/5})^{1/5})^{1/5})^{1/5}$,...., et que u_n a pour limite x_0, on pourrait alors écrire $x_0=(2+...(2+(2+2^{1/5})^{1/5})^{1/5}...)^{1/5}$.

Tiens, est-ce à dire, puisque x_0 s'écrit à l'aide de radicaux (les puissances 1/5), que cette équation $x^5-x-2=0$ est résoluble par radicaux?
Non : voir le paragraphe suivant (exemple 4 du commentaire 3 sur le 3.4 et 3.5)! **En fait l'expression par radicaux précédente ne correspond pas à une résolubilité par radicaux, car les radicaux intervenant dans l'écriture de x_0 ne sont pas en nombre fini!**

3)

3.1) Un résultat préliminaire :

On note $w=\exp(2\pi i/5)=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)$: c'est une racine 5ième de 1 primitive, car elle génère toutes les racines 5ièmes de 1.
Les autres racines 5ièmes de 1 prmitives sont w^2, w^3, w^4 (car 5 est 1er).
Rappelons, ce qui servira, en permanence, que la somme des racines 5ièmes de 1 est nulle : $1+w+w^2+w^3+w^4=0$; en outre w et w^4 sont conjugués, ainsi que w^2 et w^3.

3.1.1) Soit P un polynôme (à coefficients dans C) de degré 5, sans terme de degé 4 :
alors il existe quatre nombres complexes, uniques, u_1, u_2, u_3, u_4 tels que les cinq racines x_j de P s'écrivent :
$x_j=w^ju_1+w^{2j}u_2+w^{3j}u_3+w^{4j}u_4$, pour j=0,1,2,3,4.

Ce résultat est encore vrai si on change

w en w^2 ou en w^3 ou en w^4

3.1.2) quelque soient les nombres complexes u_1, u_2, u_3, u_4 et en posant $x_j=w^ju_1+w^{2j}u_2+w^{3j}u_3+w^{4j}u_4$, pour j=0,1,2,3,4, alors x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sont les cinq racines du polynôme $X^5+c_3X^3+c_2X^2+c_1X+c_0$, avec
$c_3=-5(u_1u_4+u_2u_3)$
$c_2=-5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)$
$c_1=5(u_1^2u_4^2+u_2^2u_3^2-u_1u_2u_3u_4 -u_1^3u_2 -u_2^3u_4-u_3^3u_1-u_4^3u_3)$
$c_0=-(u_1^5+u_2^5+u_3^5+u_4^5- 5(u_1u_4-u_2u_3) (u_1^2u_3-u_2^2u_1-u_3^2u_4+u_4^2u_2))$

Si on change

(u_1, u_2, u_3, u_4) en (u_3, u_1, u_4, u_2) ou en (u_2, u_4, u_1, u_3) ou en (u_4, u_3, u_2, u_1)
ou, w en w^2 ou en w^3 ou en w^4

alors x_0 est inchangé et les quatre autres racines x_j sont globalement conservées : donc le résultat 3.1.2 ci-dessus tient encore!

De même, 3.1.2 est encore vrai si on remplace u_i par $w^i u_i$, pour i=1,2,3,4 : en effet x_0 devient x_1, x_1 devient x_2, x_2 devient x_3, x_3 devient x_4, et x_4 devient x_0.

3.2) Un autre résultat préliminaire :

p et q étant deux réels,
$P(X)=X^5+pX+q$ a une seule racine réelle si et seulement si $p\geq 0$ ou $p<0$ et $(-p/5)^5<(q/4)^4$;
sinon P a trois racines réelles distinctes (cas $p<0$ et $(-p/5)^5>(q/4)^4$) ou deux racines réelles, une étant double (cas $p<0$ et $(-p/5)^5=(q/4)^4$).

On notera que si p=-5, q=-4t, alors P a une seule solution réelle si et seulement si $1<t^4$, soit t<-1 ou t>1 : c'est bien ce qui a été trouvé au 2.1.

3.3)
Il a été vu au chapitre 7 (P11.2) que pour tout entier n>4, il existe des polynômes de degré n non résolubles sur Q.
En particulier, c'est le cas de tout polynôme irréductible de Q[X] dont le degré est un nombre 1er et ayant exactement deux racines complexes conjuguées, les autres étant réelles (forcément distinctes, un polynôme irréductible ayant ses racines distinctes).
Exemple : $X^5-10X+5=0$ est non résoluble.
Deux conséquences immédiates pour $P(X)=X^5+pX+q$, avec p et q rationnels et P irréductible :
si P est résoluble alors il a une seule racine réelle (sinon il aurait exactement trois racines réelles et serait non résoluble).
si $p<0$ et $(-p/5)^5>(q/4)^4$ alors P est non résoluble (car d'après le 3.2, il a trois racines réelles).

Rappelons que tout polynôme de degré 5 réductible sur Q[X] est résoluble par radicaux, puisqu'il s'écrit U×V avec soit d°U=1 et d°V=4, soit d°U=2 et d°V=3, et on sait que tout polynôme de degré<5 est résoluble par radicaux.
Donc si un polynôme de degré 5 n'est pas résoluble par radicaux alors il est irréductible. Mais la réciproque est bien sûr fausse (voir commentaire 1 sur le 3.4 et 3.5).

Le but des deux paragraphes suivants est de préciser, en termes de résolubilité par radicaux, le cas des polynômes de degré 5 de la forme X^5+pX+q.
Les résultats indiqués ci-dessous, trouvés dans un article de C.Boswell et M.L. Glasser intitulé Solvable Sextic Equations, sont dûs à BK Spearman, KS Williams en 1994, lesquels utilisèrent des résultats de 1991 de DS Dummit.

Par contre, tous les "commentaires" sur les paragraphes 3.4 et 3.5 ci-dessous sont personnels.

Soit $P(X)=X^5+pX+q$, avec <u>p et q dans Q</u>, et <u>P irréductible</u>. P est donc de la forme Bring-Jerrard, mais avec ses coefficients dans Q.

3.4) **Le polynôme P est résoluble par radicaux si et seulement si il existe trois rationnels k=-1 ou 1, c>0 et e≠0 tels que**
$p=5e^4(3-4kc)/(c^2+1)$ et $q=-4e^5(11k+2c)/(c^2+1)$.

Dans ce cas les racines de P sont x_0,x_1,x_2,x_3,x_4, données par

$$x_j=e(w^ju_1+w^{2j}u_2+w^{3j}u_3+w^{4j}u_4),\text{ pour } j=0,1,2,3,4.$$

avec

$w=\exp(2\pi i/5)=\cos(2\pi/5)+i\sin(2\pi/5)=(5^{1/2}-1)/4+i((10+2\times5^{1/2})^{1/2})/4$
$D=c^2+1$
$v_1=D^{1/2}+(D-kD^{1/2})^{1/2}$, $v_2=-D^{1/2}-(D+kD^{1/2})^{1/2}$,
$v_3=-D^{1/2}+(D+kD^{1/2})^{1/2}$, $v_4=D^{1/2}-(D-kD^{1/2})^{1/2}$
et enfin
$u_1=(v_1^2v_3/D^2)^{1/5}$, $u_2=(v_3^2v_4/D^2)^{1/5}$, $u_3=(v_2^2v_1/D^2)^{1/5}$, $u_4=(v_4^2v_2/D^2)^{1/5}$

La preuve de ce résultat ne sera faite que dans un sens : si $p=5e^4(3-4kc)/(c^2+1)$ et $q=-4e^5(11k+2c)/(c^2+1)$, alors P est effectivement résoluble par radicaux (voir commentaire 2 ci-dessous sur le 3.4 et 3.5).

Par ailleurs, dans ce commentaire on explicitera les deux polynômes de degré 4 à coefficients dans Q, dont l'un a pour racines les v_i, l'autre les u_i^5.

3.5) Exceptés les cas p=0 et q différent d'une puissance 5ième d'un élément de Q (auquel cas P est irréductible et résoluble par radicaux), les **seuls autres cas** où P est irréductible et résoluble par radicaux avec $|p|\leq40$ et $|q|\leq40$ sont au nombre de 6 :

$$X^5+20X\pm32,\ X^5+15X\pm12,\ X^5-5X\pm12$$

Voir commentaire 1 ci-dessous sur le 3.4 et 3.5 pour le fait que ces six polynômes sont effectivement irréductibles et commentaire 5 pour effectivement résolubles ; la preuve que ces six polynômes sont les seuls à être irréductibles et résolubles (à part les cas p=0 et q différent d'une puissance 5ième d'un rationnel) ne sera pas faite.

Preuve du 3.1.1

Les cinq nombres complexes x_j étant donnés, il s'agit de trouver u_1, u_2, u_3, u_4 tels que

$$x_0=u_1+u_2+u_3+u_4$$
$$x_1=wu_1+w^2u_2+w^3u_3+w^4u_4$$
$$x_2=w^2u_1+w^4u_2+wu_3+w^3u_4$$
$$x_3=w^3u_1+wu_2+w^4u_3+w^2u_4$$
$$x_4=w^4u_1+w^3u_2+w^2u_3+wu_4$$

Il s'agit donc de résoudre un systéme linéaire de cinq équations à quatre inconnues. Les quatre dernières équations s'écrivent matriciellement AU=X, avec A la matrice 4×4 dont l'élément (i,j) est w^{ij}, et en notant ${}^tM$ la transposée de la matrice M, ${}^tU=(u_1\ u_2\ u_3\ u_4)$ et ${}^tX=(x_1\ x_2\ x_3\ x_4)$.
Cette matrice A (symétrique) est inversible car son déterminant est non nul :

méthode 1

on est en forme et on développe ce déterminant par rapport à la première colonne, ce qui donne (en appliquant quatre fois Sarrus)

$\det(A)=-5(w+w^4-(w^2+w^3))=-5(1+2(w+w^4))=-5(1+4\cos(2\pi/5))=-5\times 5^{1/2}$
(rappel : w est solution de $x^4+x^3+x^2+x+1=0$, qui s'écrit $X^2+X-1=0$ en posant $X=x+1/x$. Donc $w+1/w=(-1\pm 5^{1/2})/2$; mais $w+1/w=2\cos(2\pi/5)>0$ et $\cos(2\pi/5)=(5^{1/2}-1)/4$).

méthode 2

astuce : A^2 est la matrice dont tous les éléments valent -1, sauf ceux de la diagonale transverse qui sont égaux à 4.
en faisant apparaître trois zéros sur la 1ière colonne de $\det(A^2)$, et en développant par rapport à cette colonne, on obtient $\det(A^2)=125$; comme $\det(A^2)=(\det(A))^2$, on obtient det (A) au signe près : il est bien non nul (et c'est en accord avec la valeur précédente).

Donc il existe un seul U tel que AU=X, c'est-à-dire, il existe u_1, u_2, u_3, u_4 uniques tels que
$x_1=wu_1+w^2u_2+w^3u_3+w^4u_4$
$x_2=w^2u_1+w^4u_2+wu_3+w^3u_4$
$x_3=w^3u_1+wu_2+w^4u_3+w^2u_4$
$x_4=w^4u_1+w^3u_2+w^2u_3+wu_4$
Donc, par ajout membre à membre de ces quatre égalités on obtient
$x_1+x_2+x_3+x_4=-(u_1+u_2+u_3+u_4)$; mais, par hypothèse, la somme des cinq x_j est nulle donc
$x_0=-(x_1+x_2+x_3+x_4)=u_1+u_2+u_3+u_4$, ce qui prouve le résultat annoncé.

Ce résultat reste vrai si on remplace w par w^2 ou w^3 ou w^3, car cela revient à permuter les lignes de la matrice A, et donc son déterminant reste non nul.

Preuve du 3.1.2

Les cinq racines x_j s'écrivent

$x_0=u_1+u_2+u_3+u_4$
$x_1=wu_1+w^2u_2+w^3u_3+w^4u_4$
$x_2=w^2u_1+w^4u_2+wu_3+w^3u_4= wu_3+w^2u_1+w^3u_4+w^4u_2$
$x_3=w^3u_1+wu_2+w^4u_3+w^2u_4= wu_2+w^2u_4+w^3u_1+w^4u_3$
$x_4=w^4u_1+w^3u_2+w^2u_3+wu_4= wu_4+w^2u_3+w^3u_2+w^4u_1$

L'invariance globale des racines x_1, x_2, x_3, x_4 lorsqu'on change

(u_1, u_2, u_3, u_4) en (u_3, u_1, u_4, u_2) ou en (u_2, u_4, u_1, u_3) ou en (u_4, u_3, u_2, u_1)
ou, w en w^2 ou en w^3 ou en w^4

se vérifie "directement" sans difficulté.

De même lorsqu'on remplace chaque u_i par w^iu_i : on vérifie tout de suite que x_i devient x_{i+1} (avec $x_5=x_0$). Il y a cette fois invariance globale de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4.

On peut interpréter le premier type de changement en termes de permutations.

Soit p un élément du groupe S_4, c'est-à-dire une bijection de {1;2;3;4} dans lui-même, et convenons de poser pour toute matrice ligne à quatre éléments $M=(m_1\ m_2\ m_3\ m_4)$:

$p(M)=(m_{p(1)}\ m_{p(2)}\ m_{p(3)}\ m_{p(4)})$

En posant $W=(w\ w^2\ w^3\ w^4)$ et $U_1=(u_1\ u_2\ u_3\ u_4)$, $U_2=(u_3\ u_1\ u_4\ u_2)$, $U_3=(u_2\ u_4\ u_1\ u_3)$, $U_4=(u_4\ u_3\ u_2\ u_1)$ alors on a

$U_1=p_1(U_1)$, avec p_1=id, la permutation identité
$U_2=p_2(U_1)$, avec p_2 la permutation envoyant 1 en 3, 2 en 1, 3 en 4, 4 en 2
$U_3=p_3(U_1)$, avec p_3 la permutation envoyant 1 en 2, 2 en 4, 3 en 1, 4 en 3
$U_4=p_4(U_1)$, avec p_4 la permutation envoyant 1 en 4, 2 en 3, 3 en 2, 4 en 1

Comme, pour j=1,2,3,4, on a $x_j=W{}^tU_j$, (${}^tM$ étant la transposée de la matrice ligne M), on peut dire que $\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\}$ est l'ensemble des $W{}^tU$, où U parcourt l'ensemble $E=\{p_1(U_1);\ p_2(U_1);\ p_3(U_1);\ p_4(U_1)\}$.
Or $G=\{id=p_1;\ p_2;\ p_3;\ p_4\}$ est un sous-groupe cyclique de S_4 : il est engendré par p_2 puisque $p_3=p_2op_2op_2=p_2{}^3$, $p_4=p_2{}^2$ et $id=p_2{}^4$; p_3 est aussi générateur, mais pas p_4.
D'où si on remplace U_1 par $U_2=p_2(U_1)$, E devient $\{p_1(p_2(U_1));\ p_2(p_2(U_1));\ p_3(p_2(U_1));\ p_4(p_2(U_1))\}$, ensemble qui est encore E, puisque $p_1op_2=p_2$, $p_2op_2=p_4$, $p_3op_2=p_2{}^4=id$, $p_4op_2=p_2{}^3=p_3$; ou d'une façon plus générale parceque si on multiplie tous les éléments d'un groupe fini par un élément de ce groupe on réobtient tous les éléments du groupe (ici on on a multiplié, à droite, tous les éléments de G par p_2).
De même E est inchangé si on remplace U_1 par $U_3=p_3(U_1)$ ou par $U_4=p_4(U_1)$, ce qui explique que $\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\}$ soit alors inchangé.

Maintenant si on remplace w par w^2, W devient $(w^2\ w^4\ w\ w^3)=p_3(W)$ et $\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\}$ est toujours l'ensemble des $p_3(W){}^tU$, U parcourant E ; mais $p_3(W){}^tU=W{}^tp_3(U)$, et lorsque U parcourt E, $p_2(U)$ décrit aussi tout E (même raison que ci-dessus) et donc $\{x_1;\ x_2;\ x_3;\ x_4\}$ reste inchangé.
Même chose si on remplace w par w^3, auquel cas W devient $(w^3\ w\ w^4\ w^2)=p_2(W)$ et si on remplace w par w^4, W devient $(w^4\ w^3\ w^2\ w)=p_4(W)$.

Prouvons maintenant que x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 sont bien les racines du polynôme $X^5+c_3X^3+c_2X^2+c_1X+c_0$:
c'est-à-dire que $(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)= X^5+c_3X^3+c_2X^2+c_1X+c_0$.
Je laisse le lecteur vérifier ce résultat dans le cas particulier où les u_i sont tous égaux à 1 : $x_0=4$ et tous les autres x_i valent -1, et donc le membre de gauche est $X^5-10X^3-20X^2-15X-4$.

Pour le cas général je vais montrer que

$\Sigma x_i=0$, $\Sigma x_ix_j=c_3$, $\Sigma x_ix_jx_k=-c_2$, $\Sigma x_ix_jx_kx_l=c_1$, $x_0x_1x_2x_3x_4=-c_0$.

Preuve de $\Sigma x_i=0$

Compte-tenu que la somme des racines 5ièmes de 1 est 0, on vérifie immédiatement que $x_0+x_1+x_2+x_3+x_4=0$.

Preuve de $\Sigma x_ix_j=c_3$: c'est déjà moins immédiat

Montrons qu'effectivement $C=\Sigma_{i=0,\dots,3}\ x_i(\Sigma_{j=i+1,\dots,4}x_j)=c_3$.
En notant $S_{a,b}=\Sigma_{i=0,\dots,3}\ w^{ai}(\Sigma_{j=i+1,\dots,4}\ w^{bj})$, **avec a et b dans {1;2;3;4}**, on a tout de suite
$C=[S_{1,1}u_1{}^2+S_{2,2}u_2{}^2+S_{3,3}u_3{}^2+S_{4,4}u_4{}^2$
$+(S_{1,2}+S_{2,1})u_1u_2+(S_{1,3}+S_{3,1})u_1u_3+(S_{1,4}+S_{4,1})u_1u_4+(S_{2,3}+S_{3,2})u_2u_3+(S_{2,4}+S_{4,2})u_2u_4+(S_{3,4}+S_{4,3})u_3u_4]$

On notera que pour tous les $S_{a,b}$ intervenant dans C, a et b ne sont pas des multiples de 5 (puisque ils sont égaux à 1 ou 2 ou 3 ou 4).
Or n étant différent d'un multiple de 5, on a $1+w^n+w^{2n}+w^{3n}+w^{4n}=0$ (soit on considère qu'il s'agit de la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique, soit on remarque que n étant premier avec 5, on a en fait la somme de toutes les racines 5ièmes de 1) ;
on en déduit que $S_{a,b}=\Sigma_{i=0,\dots,3}\, w^{ai}(0-(1+w^b+\dots+w^{bi})=\Sigma_{i=0,\dots,3}\, w^{ai}(-(1-w^{b(i+1)})/(1-w^b))$, b étant différent d'un multiple de 5.
Ainsi $S_{a,b}=(-1/(1-w^b))(\Sigma_{i=0,\dots,3}\, w^{ai}-w^b\Sigma_{i=0,\dots,3}\,(w^{(a+b)i}))=(-1/(1-w^b))(-w^{4a}-w^b\Sigma_{i=0,\dots,3}\,(w^{(a+b)i}))$, puisque a n'est pas un multiple de 5.
Là, il y a deux cas à envisager :

> $a+b\neq 5$
> $S_{a,b}=(-1/(1-w^b))(-w^{4a}-w^b(-(w^{4(a+b)}))=(-1/(1-w^b))(-w^{4a})(1-w^{5b})=0$ (puisque $w^5=1$!).
>
> $a+b=5$
> $S_{a,b}=(-1/(1-w^b))(-w^{4a}-4w^b)=(w^{4a}+4w^b)/(1-w^b)=5w^b/(1-w^b)=5/(w^a-1)$, car $w^{4a}=w^{20-4b}=w^{-4b}=w^b$ et $w^{a+b}=1$
> d'où si a+b=5 : $S_{a,b}+S_{b,a}=5/(w^a-1)+5w^a/(1-w^a)=-5$

On peut alors conclure :
dans $C=\Sigma_{i=0,\dots,3}\, x_i(\Sigma_{j=i+1,\dots,4} x_j)$, les coefficients des u_iu_j sont donc tous nuls, sauf celui de u_1u_4 qui est $S_{1,4}+S_{4,1}=-5$ et celui de u_2u_3 qui est $S_{2,3}+S_{3,2}=-5$: ainsi $C=-5(u_1u_4+u_2u_3)$, et on a bien $C=c_3$, soit $\mathbf{\Sigma x_ix_j=c_3}$.

Preuve de $\mathbf{\Sigma x_ix_jx_k=-c_2}$: c'est encore moins immédiat

Montrons qu'effectivement $C=\Sigma_{i=0,\dots,2}\, x_i(\Sigma_{j=i+1,\dots,3} x_j\,(\Sigma_{k=j+1,\dots,4} x_k))=-c_2$.
En notant $S_{a,b,c}=\Sigma_{i=0,\dots,2}\, w^{ai}(\Sigma_{j=i+1,\dots,3} w^{bj}\,(\Sigma_{k=j+1,\dots,4} w^{ck}))$, **avec a,b,c dans {1;2;3;4}**, et puisque $w^{ai}w^{bj}w^{ck}$ est le coefficient de $u_au_bu_c$, u_a étant pris dans le facteur x_i, u_b étant pris dans le facteur x_j, u_c étant pris dans le facteur x_k, on voit tout de suite que dans l'expression C

> le coefficient de u_a^3 est $S_{a,a,a}$
> le coefficient de $u_a^2u_b$, avec a différent de b, est $S_{a,a,b}+S_{a,b,a}+S_{b,a,a}$
> et le coefficient des quatre $u_au_bu_c$, avec a,b,c distincts, est la sommme des $S_{a,b,c}$, somme prise sur les six permutations de a,b,c.

Jusque là, ca va! Mais, vu que je n'arrive pas à vraiment simplifier $S_{a,b,c}$, ca va être longuet : je me demande donc si j'ai bien pris cette démonstration par le bon bout.

Essayons de simplifier $S_{a,b,c}$:
$S_{a,b,c}=w^b(w^{2c}+w^{3c}+w^{4c})+w^{2b}(w^{3c}+w^{4c})+w^{3b}w^{4c}+w^a(w^{2b}(w^{3c}+w^{4c})+w^{3b}w^{4c})+w^{2a}w^{3b}w^{4c}$
$S_{a,b,c}=w^{b+2c}(1+w^c+w^{2c}+w^b(w^c+w^{2c})+w^{2b+2c}+w^{a+b}(w^c+w^{2c})+w^{a+2b+2c}+w^{2a+2b+2c})$
$S_{a,b,c}=w^{b+2c}(1+w^c+w^{2c}+w^b(w^c+w^{2c})+w^{a+b}(w^c+w^{2c})+(1+w^a+w^{2a})w^{2b+2c})$; là on a une somme de dix termes. Mais puisque a et c ne sont pas des multiples de 5
$S_{a,b,c}=w^{b+2c}(-w^{3c}-w^{4c}+w^b(w^c+w^{2c})+w^{a+b}(w^c+w^{2c})-(w^{3a}+w^{4a})w^{2b+2c})$, ce qui donne

> <u>r0</u>
> $S_{a,b,c}=w^{b+2c}(-w^{3c}-w^{4c}-w^{3a+2b+2c}-w^{4a+2b+2c}+w^{b+c}+w^{b+2c}+w^{a+b+c}+w^{a+b+2c})$; cette fois on a une somme de huit termes. Est-ce vraiment mieux? En tout cas je n'ai pas... vraiment mieux!

Cependant cette formule r0 va me permettre d'aller jusqu'au bout ; à l'aide de "petits calculs" , dont certains seront laissés aux bons soins du lecteur..., on trouve, a, b, c étant dans {1;2;3;4} :

r1

$S_{a,a,a}=0$

A noter que ce résultat peut se trouver sans aucun calcul ; en effet $S_{a,a,a}$ est la somme des produits 3 à 3 des racines de X^5-1, puisque w^a engendre toutes les racines 5ièmes de 1, et comme le coefficient de X^3 est 0, $S_{a,a,a}$ est bien nul.

r2

$S_{a,a,2a}=S_{a,2a,a}=S_{2a,a,a}=0$

par exemple $S_{a,a,2a}=w^{5a}(-w^{6a}-w^{8a}-w^{9a}-w^{10a}+w^{3a}+w^{5a}+w^{4a}+w^{6a})=(-w^{a}-w^{3a}-w^{4a}-1+w^{3a}+1+w^{4a}+w^{a})=0$

Si a=1 ou 2, cette égalité s'applique sans problème, mais si a=3 ou 4, on remplacera 2a par sa valeur modulo 5, soit respectivement 1 et 3.

En effet, si a=3 ou 4, 2a=6 ou 8 et n'est pas dans {1;2;3;4}. En fait, l'expression ci-dessus à droite du signe égal est bien nulle pour tout a dans Z, ce qui donne "$S_{3,3,6}$"=0 ; mais si on se reporte à l'égalité r0 donnant $S_{a,b,c}$ on voit clairement que son membre de droite est inchangé si on ajoute à a ou b ou c un multiple de 5 : on peut dire que $S_{3,3,1}=S_{3,3,6}$.

r3

$S_{1,1,4}+S_{1,4,1}+S_{4,1,1}=0$, chacun des trois termes étant non nul.

r4

Si 2a+c est un multiple de 5, alors $S_{a,a,c}+S_{a,c,a}+S_{c,a,a}=5$.

en effet, on a $w^c=w^{-2a}=w^{3a}$, ce qui permet d'écrire

$S_{a,a,c}=w^{7a}(-w^{9a}-w^{12a}-w^{11a}-w^{12a}+w^{4a}+w^{7a}+w^{5a}+w^{8a})=-w^{a}-w^{4a}-w^{3a}-w^{4a}+w^{a}+w^{4a}+w^{2a}+1$
$=1+w^{2a}-w^{3a}-w^{4a}$

$S_{a,c,a}=w^{5a}(-w^{3a}-w^{4a}-w^{11a}-w^{12a}+w^{4a}+w^{5a}+w^{5a}+w^{6a})$
$=-w^{3a}-w^{4a}-w^{a}-w^{2a}+w^{4a}+1+1+w^{a}=2-w^{2a}-w^{3a}$

$S_{c,a,a}=w^{3a}(-w^{3a}-w^{4a}-w^{13a}-w^{16a}+w^{2a}+w^{3a}+w^{5a}+w^{6a})$
$=-w^{a}-w^{2a}-w^{a}-w^{4a}+1+w^{a}+w^{3a}+w^{4a}=1-w^{a}-w^{2a}+w^{3a}$

d'où $S_{a,a,c}+S_{a,c,a}+S_{c,a,a}=4-w^{a}-w^{2a}-w^{3a}-w^{4a}=5$.

r5

$S_{2,1,3}=S_{3,1,2}=0$, $S_{1,3,2}$ et $S_{3,2,1}$ sont opposés, ainsi que $S_{1,2,3}$ et $S_{2,3,1}$.

Ainsi, la somme des six $S_{a,b,c}$, somme prise sur les six permutations de (1,2,3), est 0.

Par exemple $S_{1,2,3}=w^{8}(-w^{9}-w^{12}-w^{13}-w^{14}+w^{5}+w^{8}+w^{6}+w^{9})=-w^{2}-1-w-w^{2}+w^{3}+w+w^{4}+w^{2}=-1-w^{2}+w^{3}+w^{4}$

et $S_{2,3,1}=w^{5}(-w^{3}-w^{4}-w^{14}-w^{16}+w^{4}+w^{5}+w^{6}+w^{7})$
$=-w^{3}-w^{4}-w^{4}-w+w^{4}+1+w+w^{2}=1+w^{2}-w^{3}-w^{4}$

On peut alors conclure :

d'après r1, les coefficients des u_i^3 sont nuls

d'après r2, les coefficients de $u_1^2u_2$, $u_2^2u_4$, $u_3^2u_1$, $u_4^2u_3$ sont nuls

d'après r3, le coefficient de $u_1^2u_4$ est nul ; mais compte-tenu que les x_j sont globalement invariants

si U_1 devient U_2 ou U_3 ou U_4, (voir début de cette preuve du 3.1), on a encore ce résultat si on remplace (1,4) par (3,2) ou (2,3) ou (4,1) : les coefficients de $u_1^2u_4$, $u_3^2u_2$, $u_2^2u_3$, $u_4^2u_1$ sont nuls d'après r4, les coefficients de $u_1^2u_3$, $u_2^2u_1$, $u_3^2u_4$, $u_4^2u_2$ sont égaux à 5
enfin, d'après r5, le coefficient de $u_1u_2u_3$ est nul et donc (en invoquant le fait que c'est encore vrai si on remplace U_1 par U_2 ou U_3 ou U_4), les coefficients de $u_3u_1u_4$, $u_2u_4u_1$, $u_4u_3u_2$ sont aussi nuls

Finalement l'expression C se réduit à $C=5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)$, et on a bien $C=-c_2$, soit $\boldsymbol{\Sigma x_ix_jx_k=-c_2}$.

Preuve de $\boldsymbol{x_0x_1x_2x_3x_4=-c_0}$: ce n'est pas une erreur, je terminerai par la preuve de $\Sigma x_ix_jx_kx_l=c_1$

Je vais commencer par le calcul de $x_1x_2x_3x_4$; en remarquant que si on change w en w^2, x_1 devient x_2 et x_4 devient x_3 il suffit de calculer d'abord x_1x_4.

En développant on obtient une somme de dix termes :
$x_1x_4=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+(w+w^4)u_1u_2+(w^2+w^3)u_1u_3+(w^2+w^3)u_1u_4+(w+w^4)u_2u_3+(w^2+w^3)u_2u_4+(w+w^4)u_3u_4$
d'où
$x_2x_3=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+(w^2+w^3)u_1u_2+(w+w^4)u_1u_3+(w+w^4)u_1u_4+(w^2+w^3)u_2u_3+(w+w^4)u_2u_4+(w^2+w^3)u_3u_4$

Il s'agit de passer maintenant à $x_1x_2x_3x_4$, cela sans écrire les 100 termes résultants d'un développement "brutal" des deux facteurs x_1x_4 et x_2x_3 :
on obtient évidemment $u_1^4+u_2^4+u_3^4+u_4^4$
pour chacun des 12 termes $u_i^3u_j$, i différent de j, le coefficient est $1\times(w^2+w^3)+(w+w^4)\times1$ (car chacun de ces termes provient de u_i^2 pris dans un facteur et de u_iu_j, (coefficienté par w^2+w^3 ou $w+w^4$ selon le facteur), pris dans l'autre), soit -1
pour chacun des 6 termes $u_i^2u_j^2$, i différent de j, le coefficient est $1+1+(w+w^4)(w^2+w^3)$ (car c'est soit le produit de u_i^2 et de u_j^2, soit c'est le produit de u_iu_j et de u_iu_j), soit $2+w+w^2+w^3+w^4=1$.
pour chacun des 12 termes $u_i^2u_ju_k$, i,j,k distincts, c'est plus embêtant car en fait le coefficient ne va pas toujours être le même : c'est soit 2, soit -3

> en effet chacun de ces terme est obtenu soit par le produit de u_i^2 par u_ju_k, soit par le produit de u_iu_j par u_iu_k ; mais les coefficients de u_iu_j et de u_iu_k, dans leur facteur respectif, peuvent être les mêmes ou pas!
> ils sont différents pour $u_1^2u_3u_4$, $u_2^2u_1u_3$, $u_3^2u_2u_4$, $u_4^2u_1u_2$: ces 4 termes ont alors chacun pour coefficient (dans $x_1x_2x_3x_4$) :
> $(w^2+w^3)+(w+w^4)+2(w^2+w^3)(w+w^4)= 3(w+w^2+w^3+w^4)=-3$
> par contre les 8 autres $u_i^2u_ju_k$ auront pour coefficient :
> $(w^2+w^3)+(w+w^4)+(w+w^4)^2+(w^2+w^3)^2=3+w+w^2+w^3+w^4=2$

et enfin, pour le terme $u_1u_2u_3u_4$, on remarque qu'il est obtenu de 6 manières différentes (u_1u_2 par u_3u_4 ou u_1u_3 par u_2u_4 ou par u_1u_4 par u_2u_3), ce qui donne comme coefficient :
$2(w+w^4)(w^2+w^3)+2(w+w^4)(w^2+w^3)+(w^2+w^3)^2+(w+w^4)^2=-2-2+3=-1$

Ouf, on peut conclure :

$\mathbf{x_1x_2x_3x_4=\Sigma(4\ termes)u_i^4 -\Sigma(12\ termes)u_i^3u_j +\Sigma(6\ termes)u_i^2u_j^2 -3(u_1^2u_3u_4+u_2^2u_1u_3+ u_3^2u_2u_4+u_4^2u_1u_2) +2\Sigma(des\ 8\ autres\ termes)u_i^2u_ju_k -u_1u_2u_3u_4}$

<u>Remarque 1</u> : dans cette expression n'apparaît plus w : cela est cohérent avec le fait que si les u_i étaient tous réels, alors x_1 et x_4 seraient conjugués, ainsi que x_2 et x_3 et donc $x_1x_2x_3x_4$ serait réel.
<u>Remarque 2</u> : si les u_i sont tous égaux à 1, alors $x_1=x_2=x_3=x_4=-1$, donc leur produit est 1 et on vérifie que la formule ci-dessus donne 4-12+6-3×4+2×8-1=1.

Passons maintenant au calcul de $x_0(x_1x_2x_3x_4)= (u_1+u_2+u_3+u_4)(x_1x_2x_3x_4)$, pour vérifier que c'est bien égal à $-c_0$ et cela sans développer brutalement :
on obtient évidemment $u_1^5+u_2^5+u_3^5+u_4^5$
pour les termes $u_i^4u_j$, le coefficient est 1×1+1×(-1), car un tel terme provient de $u_j\times u_i^4$ ou de $u_i\times (u_i^3u_j)$, soit 0
pour les termes $u_i^3u_j^2$, le coefficient est 1×1+1×(-1), car un tel terme provient de $u_i\times(u_i^2u_j^2)$ ou de $u_j\times(u_i^3u_j)$, soit 0
pour les termes $u_i^3u_ju_k$, il y a trois origines possibles : $u_i\times(u_i^2u_ju_k)$ ou $u_j\times(u_i^3u_k)$ ou $u_k\times(u_i^3u_j)$

> mais compte-tenu que le coefficient de $u_i^2u_ju_k$ dans $x_1x_2x_3x_4$ est -3 ou 2, il y a deux cas à envisager :
> pour $u_1^3u_3u_4$, $u_2^3u_1u_3$, $u_3^3u_2u_4$, $u_4^3u_1u_2$, le coefficient est 1×(-3)+1×(-1)+1×(-1)=-5
> pour les autres $u_i^3u_ju_k$, le coefficient est 1×2+1×(-1)+1×(-1)=0

pour les 18 termes $u_i^2u_j^2u_k$, il y a trois origines possibles : $u_i\times(u_iu_j^2u_k)$ ou $u_j\times(u_i^2u_ju_k)$ ou $u_k\times(u_i^2u_j^2)$

> mais compte-tenu que le coefficient de $u_i^2u_ju_k$ dans $x_1x_2x_3x_4$ est -3 ou 2, il y a, là aussi deux cas à envisager :
> pour les 4 termes $u_1^2u_2^2u_4$, $u_1^2u_3^2u_2$, $u_2^2u_4^2u_3$, $u_3^2u_4^2u_1$, le coefficient est 1×2+1×2+1×1=5 (nota : ces 4 termes sont les seuls termes $u_i^2u_j^2u_k$ tels que, si on diminue de 1, l'un quelconque des exposants égal à 2, on obtient un terme de $x_1x_2x_3x_4$, coefficienté par 2, c'est-à-dire on n'obtient pas un des 4 termes $u_1^2u_3u_4$, $u_2^2u_1u_3$, $u_3^2u_2u_4$, $u_4^2u_1u_2$)
> pour les 14 termes $u_i^2u_j^2u_k$ restants, parmi $u_i^2u_ju_k$ et $u_iu_j^2u_k$ l'un est coefficienté (dans $x_1x_2x_3x_4$) par -3 et l'autre par 2 : en effet, les deux coefficients ne peuvent être égaux à 2 (sinon, $u_i^2u_j^2u_k$ serait un des quatre termes précédents) et ils ne peuvent être égaux tous les deux à -3 (car pour les 4 termes de $x_1x_2x_3x_4$ coefficientés par -3, les ensembles de leur trois indices sont distincts) ;
> le coefficient de chacun de ces 14 termes est donc 1×(-3)+1×2+1×1=0

pour les termes $u_i^2u_ju_ku_l$, il y a quatre origines possibles : $u_i(u_1u_2u_3u_4)$ ou $u_j(u_i^2u_ku_l)$ ou $u_k(u_i^2u_ju_l)$ ou $u_l(u_i^2u_ju_k)$

> la 1ière origine donne 1×(-1) comme coefficient, et vu que parmi $u_i^2u_ku_l$, $u_i^2u_ju_l$, $u_i^2u_ju_k$, l'un est coefficienté (dans $x_1x_2x_3x_4$) par -3 et les deux autres par 2 (car il n'y a que 3 façons de choisir deux indices distincts parmi {1;2;3;4}-{i}), le coefficient de $u_i^2u_ju_ku_l$ est -1+2+2-3=0

Finalement $\mathbf{x_0x_1x_2x_3x_4=}$ $u_1^5+u_2^5+u_3^5+u_4^5- 5(u_1^3u_3u_4+u_2^3u_1u_3+ u_3^3u_2u_4+u_4^3u_1u_2)$
$+5(u_1^2u_2^2u_4+u_1^2u_3^2u_2+ u_2^2u_4^2u_3+u_3^2u_4^2u_1)$
$=u_1^5+u_2^5+u_3^5+u_4^5- 5(u_1u_4-u_2u_3) (u_1^2u_3-u_2^2u_1-u_3^2u_4+u_4^2u_2) =\mathbf{-c_0}$

Preuve de $\Sigma x_ix_jx_kx_l=c_1$

En fait je vais exploiter les quatre résultats précédents pour montrer que $\Sigma x_ix_jx_kx_l$, que je noterai c'_1, est bien égal au c_1 affiché dans l'énoncé du 3.1.
En effet les quatre résultats précédents permettent de dire que les deux polynômes $(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)$ et $X^5+c_3X^3+c_2X^2+c'_1X+c_0$ son égaux.
En faisant $X=x_0$, on obtient $x_0^5+c_3x_0^3+c_2x_0^2+c'_1x_0+c_0=0$; mais $c_0 =-x_0x_1x_2x_3x_4$ et donc, en simplifiant par x_0, ce qui suppose $x_0\neq 0$, on obtient
$c'_1=-x_0^4-c_3x_0^2-c_2x_0+x_1x_2x_3x_4$.
Mais si $x_0=0$, par définition même de c'_1, on a $c'_1=x_1x_2x_3x_4$, puisque $\Sigma x_ix_jx_kx_l$ se réduit à ce seul terme ; et comme on obtient aussi $x_1x_2x_3x_4$ en faisant $x_0=0$ dans $-x_0^4-c_3x_0^2-c_2x_0+x_1x_2x_3x_4$,
on a toujours $c'_1=-x_0^4-c_3x_0^2-c_2x_0+x_1x_2x_3x_4$,
soit $c'_1=-(u_1+u_2+u_3+u_4)^4+5(u_1u_4+u_2u_3)(u_1+u_2+u_3+u_4)^2+5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)(u_1+u_2+u_3+u_4)$
$+x_1x_2x_3x_4$, cette dernière quantité ayant été explicitée plus haut (étape précédente) en fonction des u_i.

Rappelons la formule
$(a+b+c+d)^4=\Sigma(4 \text{ termes})a^4+4\Sigma(12 \text{ termes})a^3b+ 6\Sigma(6 \text{ termes})a^2b^2+12\Sigma(12 \text{ termes})$
$a^2bc+24abcd$
On vérifie bien, cas a=b=c=d, que $4^4=4+4\times12+6\times6+12\times12+24$.

On peut alors procéder comme à l'étape précédente, c'est-à-dire, pour chaque type de termes de c'_1 chercher son coefficient, mais là on ne gagnera pas, je pense, beaucoup de temps par rapport à un développement brutal.
Je le fais quand même :

pour les termes u_i^4

leur coefficient est nul, puisque ceux de $-(\Sigma u_i)^4$ sont annulés par ceux de $x_1x_2x_3x_4$

pour les termes $u_i^3u_j$

ceux de $-(\Sigma u_i)^4$ ont pour coefficient -4
$5(u_1u_4+u_2u_3)(\Sigma u_i)^2$ donne les termes $u_1^3u_4$, $u_4^3u_1$, $u_2^3u_3$, $u_3^3u_2$ avec 5 comme coefficient
$5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)(\Sigma u_i)$ donne les termes $u_1^3u_3$, $u_2^3u_1$, $u_3^3u_4$, $u_4^3u_2$ avec 5 comme coefficient
$x_1x_2x_3x_4$ donne tous les termes de la forme $u_i^3u_j$, avec -1 comme coefficient
en final, les huit termes cités précédemment ont pour coefficient -4+5-1=0, par contre les quatre restant, à savoir, $u_1^3u_2$, $u_2^3u_4$, $u_3^3u_1$, $u_4^3u_3$, ont pour coefficient -4-1=-5

pour les six termes $u_i^2u_j^2$

ceux de $-(\Sigma u_i)^4$ ont pour coefficient -6
$5(u_1u_4+u_2u_3)(\Sigma u_i)^2$ donne les termes $u_1^2u_4^2$, $u_2^2u_3^2$ avec 10 comme coefficient
$5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)(\Sigma u_i)$ donne les termes $u_1^2u_3^2$, $u_2^2u_1^2$, $u_3^2u_4^2$, $u_4^2u_2^2$ avec 5 comme coefficient
$x_1x_2x_3x_4$ donne tous les termes de la forme $u_i^2u_j^2$, avec 1 comme coefficient
en final, les quatre termes $u_1^2u_3^2$, $u_2^2u_1^2$, $u_3^2u_4^2$, $u_4^2u_2^2$, ont pour coefficient -6+5+1=0, alors que $u_1^2u_4^2$ et $u_2^2u_3^2$ ont pour coefficient -6+10+1=5

pour les douze termes $u_i^2u_ju_k$

ceux de $-(\Sigma u_i)^4$ ont pour coefficient -12
$5(u_1u_4+u_2u_3)(\Sigma u_i)^2$ donne
les quatre termes $u_2^2u_1u_4$, $u_3^2u_1u_4$, $u_1^2u_2u_3$, $u_4^2u_2u_3$ avec 5 comme coefficient (car proviennent d'un u_i^2)
et les huit autres termes $u_1^2u_2u_4$, $u_1^2u_3u_4$, $u_4^2u_1u_2$, $u_4^2u_1u_3$, $u_2^2u_1u_3$, $u_2^2u_3u_4$, $u_3^2u_1u_2$, $u_3^2u_2u_4$ avec 10 comme coefficient (car proviennent d'un double produit)
$5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)(\Sigma u_i)$ donne les huit termes $u_1^2u_2u_3$, $u_1^2u_3u_4$, $u_2^2u_1u_3$, $u_2^2u_1u_4$, $u_3^2u_1u_4$, $u_3^2u_2u_4$, $u_4^2u_1u_2$, $u_4^2u_2u_3$ avec 5 comme coefficient
$x_1x_2x_3x_4$ donne
les quatre termes $u_1^2u_3u_4$, $u_2^2u_1u_3$, $u_3^2u_2u_4$, $u_4^2u_1u_2$ avec -3 comme coefficient
les huit autres ont 2 pour coefficient

en final
$u_1^2u_3u_4$, $u_2^2u_1u_3$, $u_3^2u_2u_4$, $u_4^2u_1u_2$ ont pour coefficient -12+10+5-3=0
$u_1^2u_2u_4$, $u_4^2u_1u_3$, $u_2^2u_3u_4$, $u_3^2u_1u_2$ ont pour coefficient -12+10+2=0
les quatre restants ont pour coefficient -12+5+5+2=0

pour le terme $u_1u_2u_3u_4$

$-(\Sigma u_i)^4$ le donne avec un coefficient -24
$5(u_1u_4+u_2u_3)(\Sigma u_i)^2$ le donne avec un coefficient de 5(2+2)=20
$5(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)(\Sigma u_i)$ ne le donne pas
$x_1x_2x_3x_4$ le donne avec un coefficient de -1
en final, le coefficient est -24+20-1=-5

En récapitulant on obtient $c'_1=-5(u_1^3u_2+u_2^3u_4+u_3^3u_1+ u_4^3u_3)+5(u_1^2u_4^2+ u_2^2u_3^2)-5u_1u_2u_3u_4$: c'est exactement c_1.

Donc on a bien $\boldsymbol{\Sigma x_ix_jx_kx_l=c_1}$

Ceci termine la preuve du 3.1.2, du moins celle que jai trouvée...

Preuve du 3.2

On pose $f(x)=x^5+px+q$; $f'(x)=5x^4+p$.
Donc si $p\geq 0$, f est strictement croissante sur R, donc f s'annulera une et une seule fois (vu par ailleurs les limites aux bornes).
si $p<0$, en posant $A=(-p/5)^{1/4}>0$, f présente un maximum local en -A et un minimum local en A : $f(A)=4pA/5+q$ et $f(-A)=-4pA/5+q$.
Dans ce cas, f s'annulera une et une seule fois si et seulement si $f(-A)<0$ (donc $f(A)<0$) ou $f(A)>0$ (donc $f(-A)>0$), soit ssi $-4Ap/5<-q$ ou $-4Ap/5<q$, soit ssi $-4Ap/5<|q|$; et les deux nombres étant positifs, soit ssi $(4/5)^4\times(-p/5)\times p^4<q^4$, soit ssi $(-p/5)^5<(q/4)^4$.

Preuve du 3.3

En fait il n'y a rien à prouver : tout a été dit dans l'énoncé.

Commentaire 1 sur le 3.4 et 3.5

Illustrons le fait qu'un polynôme irréductible n'est pas forcément non résoluble par radicaux! Voir par exemple, les exemples du 3.5 qui sont irréductibles et résolubles :

> X^5+q, avec q différent d'une puissance 5ième d'un rationnel
> $X^5+20X\pm 32$, $X^5+15X\pm 12$, $X^5-5X\pm 12$

L'irréductibilité de X^5+q, résulte du fait que dans ce cas le polynôme n'a pas de racine rationnelle et d'un théorème sur l'irréductibilité de X^n-a sur K[X], avec K sous-corps de C, a non nul , n 1er ; car bien sûr le fait qu'un polynôme n'ait pas de racine dans Q, ne signifie pas qu'il soit irréductible dans Q[X], excepté s'il est de degré 2 ou 3.
Pour les six autres cas, on peut vérifier que ces six polynômes sont irréductible sur Q[X], en montrant qu'ils sont irréductibles sur Z[X] : comme ils n'ont pas de racines rationnelles, s'ils étaient réductibles dans Z[X] ils seraient de la forme $U\times V$ avec $d°U=2$, $d°V=3$, U et V à coefficients dans Z, ce qui est impossible (on essaye de trouver les coefficients en résolvant le systéme obtenu par identification des coefficients, et on arrive alors à une impossibilité).
Notons que pour $X^5+15X\pm 12$, on peut aller plus vite en utilisant le critère d'Eisenstein.

D'après le 3.3 les six polynômes $X^5+20X\pm 32$, $X^5+15X\pm 12$, $X^5-5X\pm 12$ doivent avoir une seule racine réelle : on peut le vérifier en utilisant 3.2.

Remarquons aussi que les deux cas $X^5-5X\pm 12$ correspondent exactement à la forme $X^5-5X-4t$ étudiée au paragraphe 2 avec $t=\pm 3$

Enfin, si on change q en -q, les racines de P changent de signe et donc si P était résoluble, en changeant q en - q il doit le rester : on le vérifie car si k,c, e conviennent pour $P(X)=X^5+pX+q$, alors k,c, -e conviennent pour X^5+pX-q.

Commentaire 2 sur le 3.4 et 3.5

On vérifie facilement, à partir des définitions des v_i en fonction de k et D, et des définitions des u_i, que :

$1<D$, $D^{1/2}<D$, et donc tous les radicaux apparaissant dans les v_i portent sur des quantités positives : les v_i et les u_i sont donc réels.

Profitons en pour rappeler que pour tout réel x il existe un seul réel qui élevé à la puissance 5 donne x : on le note $x^{1/5}$. Pour tout réel x on a $(-x)^{1/5}=-x^{1/5}$ et l'égalité $x^{1/5}=\exp((\ln x)/5)$ n'est vraie que si $x>0$.

$v_1+v_4=-(v_2+v_3)=2D^{1/2}$, $v_1+v_2+v_3+v_4=0$
$v_1v_4=-v_2v_3=kD^{1/2}$, $v_1v_2v_3v_4=-D$,
v_1 et v_4 étant les de racines de $X^2-2D^{1/2}X+kD^{1/2}$, v_2 et v_3 étant les racines de $X^2+2D^{1/2}X-kD^{1/2}$, on en déduit que
v_1, v_2, v_3, v_4 sont les quatres racines du polynôme $X^4-4DX^2+4kDX-D$, qui est à coefficients rationnels.

$u_1u_4=-u_2u_3=-k/D^{1/2}$, $u_1u_2u_3u_4=-1/D$ (noter que $u_1u_4=((v_1v_2v_3v_4v_1v_4)/D^4)^{1/5}$)
$u_1^2u_3=v_1/D$, $u_2^2u_1=v_3/D$, $u_3^2u_4=v_2/D$, $u_4^2u_2=v_4/D$ (par exemple $u_1^2u_3=v_1(v_3^2v_2^2/D^6)^{1/5}$, et on utilise le résultat précédent sur v_2v_3).

Déterminons maintenant le polynôme à coefficients rationnels dont les racines sont les u_i^5.
De $u_1u_4=-u_2u_3=-k/D^{1/2}$, on déduit $u_1^5u_4^5=-u_2^5u_3^5=-k/D^{5/2}$.
Reste à simplifier les sommes $u_1^5+u_4^5$ et $u_2^5+u_3^5$.
Il faut calculer....
$u_1^5+u_4^5=(v_1^2v_3+v_4^2v_2)/D^2$.
En développant, on obtient $v_1v_3=-D+D^{1/2}(Z+c)$, $v_2v_4=-D+D^{1/2}(-Z+c)$, avec $Z=(D+kD^{1/2})^{1/2}-(D-kD^{1/2})^{1/2}+c$.
En effectuant les multiplications par v_1 et v_4 on obtient (je ne détaille pas les calculs...)
$u_1^5+u_4^5=(-4D^{3/2}+2D(2c+k))/D^2$.
Un calcul analogue donne $u_2^5+u_3^5=(4D^{3/2}+2D(2c+k))/D^2$

Donc u_1^5 et u_4^5 sont racines de X^2+sX+t, avec $s=(4D^{3/2}-2D(2c+k))/D^2$ et $t=-k/D^{5/2}$
et u_2^5 et u_3^5 sont racines de $X^2+s'X+t'$, avec $s'=-(4D^{3/2}+2D(2c+k))/D^2$ et $t'=k/D^{5/2}$.

Les u_i^5 sont donc les racines de $X^4+(s+s')X^3+(ss'+t+t')X^2+(st'+s't)X+tt$, avec
$s+s'=-4(2c+k)/D$; $ss'+t+t'=ss'=(-16D^3+4D^2(2c+k)^2)/D^4=(16kc-12)/D^2$;
$st'+s't=t'(s-s')=8k/D^3$; $tt'=-1/D^5$.

Comme k, c, $D=c^2+1$ sont rationnels, **les u_i^5 sont bien les racines d'un polynôme de degré 4, à coefficients rationnels.**

<u>Remarque</u> : en fait cela était obligé si j'en crois ce que "j'ai lu" : un théorème de Lagrange dit que si un polynôme à coefficients rationnels de degré 5 est résoluble par radicaux et si on exprime ses racines à l'aide des u_i selon le 3.1.1, alors les u_i^5 sont les racines d'un polynôme de degré 4 à coefficients rationnels.

<u>Remarque</u> : on verra une vérification, partielle, à l'exemple 1 du commentaire 3 ci-dessous.

Vérifions que les cinq x_j sont effectivement les cinq racines de $P(X)=X^5+pX+q$.
Par utilisation du 3.1 on a $(X-x_0)(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)(X-x_4)= X^5+c_3X^3+c_2X^2+c_1X+c_0$

avec (on remplace les u_i du 3.1 par eu_i)
$c_3=-5e^2(u_1u_4+u_2u_3)$
$c_2=-5e^3(u_1^2u_3+u_2^2u_1+u_3^2u_4+u_4^2u_2)$
$c_1=5e^4(u_1^2u_4^2+u_2^2u_3^2-u_1u_2u_3u_4 -u_1^3u_2 -u_2^3u_4-u_3^3u_1-u_4^3u_3)$
$c_0=-e^5(u_1^5+u_2^5+u_3^5+u_4^5- 5(u_1u_4-u_2u_3)(u_1^2u_3-u_2^2u_1-u_3^2u_4+u_4^2u_2))$

Il s'agit donc de montrer que $c_3=c_2=0$, $c_1=p$, $c_0=q$.

On a vu au début de ce commentaire que u_1u_4 et u_2u_3 sont opposés, donc **$c_3=0$.**

On a aussi vu que $u_1^2u_3=v_1/D$, $u_2^2u_1=v_3/D$, $u_3^2u_4=v_2/D$, $u_4^2u_2=v_4/D$, donc $c_2=-5e^3(v_1+v_2+v_3+v_4)$; et comme la somme des v_i est nulle, on a bien **$c_2=0$.**

Toujours d'après le début de ce commentaire on a
$c_1=5e^4(1/D+1/D+1/D -u_1^3u_2 -u_2^3u_4-u_3^3u_1-u_4^3u_3)$.
Mais $u_1^3u_2=(v_1^6v_3^3v_3^2v_4/D^8)^{1/5}= v_1v_3(v_1v_4)^{1/5}/D^{8/5}$;
de même $u_2^3u_4= v_3v_4(v_2v_3)^{1/5}/D^{8/5}$; $u_3^3u_1= v_1v_2(v_2v_3)^{1/5}/D^{8/5}$; $u_4^3u_3= v_2v_4(v_1v_4)^{1/5}/D^{8/5}$.
Et comme $v_1v_4=-v_2v_3=kD^{1/2}$ on a
$c_1=5e^4(3/D-(kD^{1/2})^{1/5}K/D^{8/5})$ avec $K=v_1v_3-v_3v_4- v_1v_2+v_2v_4$.
On simplife : $K=(v_1-v_4)(v_3-v_2)=2(D-kD^{1/2})^{1/2}\times2(D+kD^{1/2})^{1/2}$, soit $K=4(D^2-D)^{1/2}=4D^{1/2}(D-1)^{1/2}=4D^{1/2}c$, et finalement ($k$ étant -1 ou 1, $k^{1/5}=k$)
$c_1=5e^4(3/D-4kcD^{1/10-8/5+1/2})=5e^4(3/D-4kc/D)$, et on a bien **$c_1=p$**.

Pour montrer que $c_0=q$, ca va être un peu plus long..., mais il y a eu "pire"!
$c_0=e^5(-K+5K'\times K'')$ avec
$K=u_1^5+u_2^5+u_3^5+u_4^5$
$K'=u_1u_4-u_2u_3$
$K''=u_1^2u_3-u_2^2u_1-u_3^2u_4+u_4^2u_2$
On a tout de suite $K'=-2kD^{-1/2}$ et $K''=(v_1-v_3-v_2+v_4)/D=(2D^{1/2}+2D^{1/2})/D$ (voir début de ce commentaire pour u_1u_4, u_2u_3, v_1+v_4, v_2+v_3) et ainsi
$5K'\times K''=-40k/D$.
Par définition des u_i, on a $K=(v_1^2v_3+v_3^2v_4+v_2^2v_1+v_4^2v_2) /D^2$; on peut alors remplacer les v_i en fonction de k et D et développer le tout, mais il y a un peu plus court.
Considérons $S=v_1^2(v_2+v_3+v_4)+ v_2^2(v_1+v_3+v_4)+ v_3^2(v_1+v_2+v_4)+v_4^2(v_1+v_2+v_3)$. Puisque la somme des v_i est nulle, on a $S=-v_1^3-v_2^3-v_3^3-v_4^3=-S_3$.
Les v_i étant les racines de $X^4-4DX^2+4kDX-D$, en appliquant le rappel de l'annexe 3 sur les sommes de Newton, on obtient $S_3=-3\times4kD=-12kD$, soit $S=12kD$.
Or $S=KD^2+v_1^2(v_2+v_4)+ v_2^2(v_3+v_4)+ v_3^2(v_1+v_2)+v_4^2(v_1+v_3)$, soit $S=KD^2+(v_2+v_4)(v_1^2-v_4^2)+(v_3+v_4)(v_2^2-v_3^2)$, puisque la somme des v_i est nulle.
De $v_1+v_4=-(v_2+v_3)=2D^{1/2}$, et en posant $t=(D+kD^{1/2})^{1/2}$ et $t'=(D-kD^{1/2})^{1/2}$, on tire successivement
$S=KD^2+2D^{1/2}((v_2+v_4)(v_1-v_4)-(v_3+v_4)(v_2-v_3))$
$S=KD^2+2D^{1/2}((-t-t')(2t')-(t-t')(-2t))=KD^2+2D^{1/2}(-4tt'-2t'^2+2t^2)$
$S=KD^2+2D^{1/2}(-4D^{1/2}c-2(D-kD^{1/2})+2(D+kD^{1/2}))=KD^2+2D(-4c+4k)$, et puisque $S=12kD$ on obtient :
$KD^2=12kD+8Dc-8kD=8Dc+4kD$ et $K=8c/D+4k/D$.
Finalement $c_0=e^5(-8c/D-4k/D-40k/D)=-e^5(8c+44k)/D$ et on a bien **$c_0=q$.**

Ouf!

Notons qu'en fait, à partir du 3.1, on vient de montrer que SI p et q sont comme indiqués au début du 3.4, alors le polynôme $P(X)=X^5+px+q$ est résoluble par radicaux, puisque ses racines s'obtiennent par radicaux (portant sur des rationnels) ; cela que P soit irréductible ou pas sur Q. Bien sûr si P est réductible, on n'a pas besoin de tous ces calculs : voir 3.3

Remarque : pour la réciproque, que je ne sais pas faire, il faut peut être partir du théorème de Lagrange que j'ai cité dans une remarque ci-dessus.

On notera l'analogie des formules donnant les racines de P avec celles de Hudde
En effet, Hudde donne pour racines de X^3+pX+q : $u+v$, $ju+j^2v$, j^2u+jv avec $j=\exp(2\pi i/3)$ et $uv=-p/3$.
et les formules du 3.2 donnent pour racines de X^5+pX+q :

$x_0=e(u_1+u_2+u_3+u_4)$: cette racine est toujours réelle : c'est la seule qui soit réelle (voir 3.3)
$x_1=e(wu_1+w^2u_2+w^3u_3+w^4u_4)$
$x_2=e(w^2u_1+w^4u_2+wu_3+w^3u_4)$
$x_3=e(w^3u_1+wu_2+w^4u_3+w^2u_4)$=conjugué de x_2 (car ici les u_i sont réels et w et w^4 sont conjugués, ainsi que w^2 et w^3)
$x_4=e(w^4u_1+w^3u_2+w^2u_3+wu_4)$=conjugué de x_1

Cependant, l'analogie avec Hudde n'est pas "parfaite", puisque le produit des u_i n'est pas un coefficient de l'équation.

Commentaire 3 sur le 3.4 et 3.5

Traitons quelques exemples.
Exemple 1 : k=1, c=4/3 e=5 donnent $P(X)=X^5-2625X-61500$.
Ce polynôme a été étudié par Euler qui a donné sa seule racine réelle.
Il a aussi été traité par Michel Arnaudies en 1974, lequel a donné un critère de résolubilité par radicaux analogue à celui du 3.4, mais un peu plus compliqué peut-être.
Pour ces deux informations, voir Fragments d'histoire des mathématiques III, brochure APMEP n° 83 de 1991, pages 7 et 143.

Déterminons la racine réelle x_0 de P, donnée par les formules du 3.4 (c'est la seule racine réelle).

$D=25/9$, $D^{1/2}=5/3$, $(D-D^{1/2})^{1/2}=10^{1/2}/3$, $(D+D^{1/2})^{1/2}=2\times10^{1/2}/3$
$v_1=(5+10^{1/2})/3$, $v_4=(5-10^{1/2})/3$, $v_2=(-5-2\times10^{1/2})/3$,$v_3=(-5+2\times10^{1/2})/3$
$u_1^5=(v_1^2v_3/D^2)=...=3(4\times10^{1/2}+5)/125$; "de même" on trouve:
$u_2^5=-9(11\times10^{1/2}-35)/125$
$u_3^5=9(11\times10^{1/2}+35)/125$
$u_4^5=3(-4\times10^{1/2}+5)/125$

Et donc, puisque $x_0=5(u_1+u_2+u_3+u_4)$
on obtient, en n'oubliant pas que $(-x)^{1/5}=-x^{1/5}$ et en remarquant que $5\times(3/125)^{1/5}=75^{1/5}$,
$x_0=(75(5+4\times10^{1/2}))^{1/5}+(225(35+11\times10^{1/2}))^{1/5}+(225(35-11\times10^{1/2}))^{1/5}+(75(5-4\times10^{1/2}))^{1/5}$

Remarque : un petit calcul montre que la somme des u_i^5 est 132/25 : c'est bien l'opposé du coefficient s+s' du terme de degré 3 du polynôme de degré 4 dont les u_i^5 sont les racines (voir

commentaire 1).
En effet $s+s'=-4(2c+k)/D=-4(8/3+1)/(25/9)=-132/25$

<u>Exemple 2</u> : $k=-1$, $c=1/2$, $e=1$ donnent $PX)=X^5+20X+32$.
C'est un des cas du 3.5 : on verra au commentaire 4 comment obtenir k, c, e à partir des coefficients $p=20$ et $q=32$.
Déterminons là aussi la racine réelle x_0 de P, donnée par les formules du 3.4 (c'est la seule racine réelle).
$D=5/4$, $D^{1/2}=5^{1/2}/2$
$v_1=5^{1/2}/2+(5/4+5^{1/2}/2)^{1/2}=(5^{1/2}+(5+2\times5^{1/2})^{1/2})/2$, $v_2=(-5^{1/2}-(5-2\times5^{1/2})^{1/2})/2$
$v_3=(-5^{1/2}+(5-2\times5^{1/2})^{1/2})/2$, $v_4=(5^{1/2}-(5+2\times5^{1/2})^{1/2})/2$
$u_1^5=v_1^2v_3/D^2=(2/25)(5^{1/2}+(5+2\times5^{1/2})^{1/2})^2(-5^{1/2}+(5-2\times5^{1/2})^{1/2})$
$u_2^5=v_3^2v_4/D^2=(2/25)(-5^{1/2}+(5-2\times5^{1/2})^{1/2})^2(5^{1/2}-(5+2\times5^{1/2})^{1/2})$
$u_3^5=v_2^2v_1/D^2=(2/25)(-5^{1/2}-(5-2\times5^{1/2})^{1/2})^2(5^{1/2}+(5+2\times5^{1/2})^{1/2})$
$u_4^5=v_4^2v_2/D^2=(2/25)(5^{1/2}-(5+2\times5^{1/2})^{1/2})^2(-5^{1/2}-(5-2\times5^{1/2})^{1/2})$
etc...
En fait ces expressions se simplifient : par exemple $u_3^5=(4/25)(5\times5^{1/2}+(5(25+2\times5^{1/2}))^{1/2})$.

<u>Exemple 3</u> : $k=1$, $c=2$ $e=1$ donnent $P(X)=X^5-5X-12$.
C'est un des cas du 3.5 : on verra au commentaire 4 comment obtenir k,c,e à partir des coefficients $p=-5$ et $q=-12$.
Donc (voir paragraphe 2 pour la fonction BR) on peut obtenir BR(3) par radicaux.

<u>Exemple 4</u> : considérons $P(X)=X^5-X-2$ (ce polynôme a été considéré à la fin du paragraphe 2).
Il est bien irréductible dans Q[X], car irréductible dans Z[X] ; et il n'est pas résoluble par radicaux, car...il n'est pas dans la liste du 3.5!
Remarquons aussi, que ce polynôme ayant une seule racine réelle, on ne peut justifier sa non résolubilité en invoquant le 3.3.

Commentaire 4 sur le 3.4 et 3.5

Le polynôme $P(X)=X^5+pX+q$ étant donné, p et q dans Q, P irréductible, pour savoir s'il est résoluble par radicaux (en utilisant le 3.4) il faut arriver à trouver
trois rationnels $k=-1$ ou 1, $c>0$ et $e\neq0$ tels que

$$p=5e^4(3-4kc)/(c^2+1) \text{ et } q=-4e^5(11k+2c)/(c^2+1).$$

Et on pourra alors expliciter les cinq racines de P.

On peut se limiter au cas p non nul, car si $p=0$ alors P est évidemment résoluble par radicaux (ses racines sont les racines 5ième de q), cela qu'il soit irréductible ou pas (selon que q soit différent d'une puissance 5ième d'un élément de Q ou pas, voir commentaire 1).

Dans ce cas $q/p=-(4e/5)(11k+2c)/(3-4kc)$, soit $e=-(5q(3-4kc))/(4p(11k+2c))$ et en reportant dans la condition p=..., on obtient une équation en k et c:
$p^5\times4^4(c^2+1)(11k+2c)^4=5^5q^4(3-4kc)^5$
Mais $k^2=1$, $c/k=kc$ et donc cette équation s'écrit, en posant $r=kc$:

$$\mathbf{p^5\times4^4(r^2+1)(11+2r)^4=5^5q^4(3-4r)^5 \text{ (E)}}$$

$r=kc$ étant rationnel, cela veut dire que **si P est résoluble par radicaux, nécessairement l'équation en r, (E), qui est de degré 6, doit admettre une solution rationnelle** (il y a un

nombre fini de cas à envisager : voir conseil pratique du chapitre 3 où c'est justifié pour un degré 3, mais c'est pareil pour n'importe quel degré).
Notons que si p=0, cette équation (E) a encore une solution rationnelle : r=3/4.

En fait, Dummit a prouvé que pour tout polynôme P de degré 5, à coefficients dans Q, il existe une équation de degré 6, à coefficients dans Q, telle que P résoluble par radicaux équivaut à ce que cette équation de degré 6 admette une solution rationnelle.

Pour $P(X)=X^5+pX+q$, irréductible, on vient de vérifier (à partir du 3.2) ce résultat dans un sens.

<u>Application 1</u> : détermination de k, c, e pour $P(X)=X^5+20X+32$ (voir exemple 2 du commentaire 3).
L'équation (E) s'écrit $4^4\times20^5(r^2+1)(11+2r)^4=5^5\times32^4(3-4r)^5$, soit $(r^2+1)(11+2r)^4-4(3-4r)^5=0$. Le coefficient de r^6 est 2^4 et le terme constant est $11^4-4\times3^5=13669$, qui est 1er.
Donc si (E) admet a/b comme solution, avec a et b entiers 1ers entre eux, c'est que a divise 13669 et b divise 2^5 : donc a=±1 ou ±13669 et $b=\pm2^i$ avec i dans {0;1;2;3;;4;5}. On vérifie que a=-1 et b=2 donnent effectivement une solution rationnelle r=-1/2 pour (E).
Donc kc=-1/2 et comme c>0, c=1/2, k=-1 et donc e ne peut être que e=-(5q(3-4kc))/(4p(11k+2c)) =1 ; réciproquement ces trois valeurs donnent bien p=20, q=32.

<u>Application 2</u> : détermination de k, c, e pour $P(X)=X^5+15X+12$
L'équation (E) s'écrit $15^5\times4^4(r^2+1)(11+2r)^4=5^5\times12^4(3-4r)^5$, soit $3(r^2+1)(11+2r)^4-(3-4r)^5=0$. Le coefficient de r^6 est 3×2^4 et le terme constant est $3\times11^4-3^5=43680=2^5\times3\times5\times7\times13$.
Donc si (E) admet a/b comme solution, avec a et b entiers 1ers entre eux, c'est que a divise $2^5\times3\times5\times7\times13$ et b divise 3×2^4 : là il y a tout de même beaucoup de choix. La TI92 donne r=-4/3 comme solution de (E) : 4 divise bien $2^5\times3\times5\times7\times13$ et b divise bien 3×2^4.
Donc kc=-4/3 et comme c>0, c=4/3, k=-1 et donc e ne peut être que e=-(5q(3-4kc))/(4p(11k+2c)) =1 ; réciproquement ces trois valeurs donnent bien p=15, q=12.

<u>Application 3</u> : détermination de k, c, e pour $P(X)=X^5-5X-12$ (voir exemple 3 du commentaire 3).
L'équation (E) s'écrit $-(r^2+1)(11+2r)^4=3^4(3-4r)^5$, soit
$16r^6-83592r^5+313960r^4-455560r^3+367465r^2-120572r+34324=0$
Donc a/b, avec a et b entiers premiers entre eux, sera solution si a divise $34324=2^2\times8581$ (8581 est 1er) et b divise $16=2^4$. Donc on n'a pas trop le choix pour a et b, et a/b ne peut être, au signe près, que $2^i\times8581^j$ avec i dans {-5;-4;...;2} et j=0 ou 1 ;
C'est a/b=2 qui convient : donc kc=2 et comme c>0 on a k=1, c=2 et e=-(5q(3-4kc))/(4p(11k+2c)) =1 ; réciproquement k=1, c=2, e=1 donnent bien p=-5 et q=-12.

Commentaire 5 sur le 3.4 et 3.5

Les six polynômes du 3.5 sont bien résolubles, car leurs p et q s'écrivent comme indiqué au 3.4.
En effet, d'après les applications du commentaire 4 et la fin du commentaire 1 on a :

P	k	c	e
$X^5+20X+32$	-1	1/2	1
$X^5+20X-32$	-1	1/2	-1
	-1	4/3	-1

$X^5+15X+12$			
$X^5+15X-12$	-1	4/3	1
$X^5-5X+12$	1	2	-1
$X^5-5X-12$	1	2	1

4)

1) Dans l'introduction de ce lien (c'est celui déjà cité au début du paragraphe 2) il est dit qu'à l'aide de fonctions transcendentales telles que la fonction théta (de Ramanujan) ou la fonction éta de Dedekind on peut donner des formules explicites (traduction de closed expressions) pour les racines d'une équation du 5ième degré : mais on n'y trouvera rien de plus sur la question.

2) Au cours de la lecture d'un exposé de maîtrise (il n'y a pratiquement pas de démonstration) j'ai appris qu'on peut résoudre les équations de degré 5 à l'aide des fonctions elliptiques :

> on se ramène à une équation sans terme de degré 3 et 4 (pas de problème : voir le paragraphe 1 ci-dessus),
> puis on se ramène à une équation de Jacobi (de degré 6), cela en passant par l'équation de Brioschi et le théorème de Perron,
> et on sait résoudre une équation de Jacobi à l'aide de la fonction de Weierstrass P définie par
>
> $$\int_0^{P(u)} (1/(4x^3-gx-g')^{1/2})dx=u$$
>
> g et g' étant tels que le polynôme du 3ième degré situé sous la racine carrée ait ses trois racines distinctes : c'est-à-dire $g^3-27g'^2\neq 0$

Pris par le temps et vu mes capacités..., je n'envisage pas d'approfondir ces deux aspects.

sommaire du site ou sommaire sur les équations