ou sommaire sur les équations

Chapitre 6

Deux méthodes de résolution dans C des équation du 4ième degré à coefficients complexes :

celles de Ferrari(1522-1560) et de Descartes(1596-1650)

ainsi que les formules de Cardan-Ferrari-AP de résolution avec radicaux d'une équation du 4ième degré.

Plan du chapitre 6 :

1) Introduction

Avant tout chose, en dehors de l'équation bicarrée qui sera évoquée ci-après, il y a un cas particulier qu'il serait dommage de ne pas voir : c'est le cas où l'équation est de la forme $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ (forme réciproque).
Dans ce cas la méthode qui s'impose consiste à diviser l'équation par x^2 et à poser $y=x+1/x$ (donc $x^2+1/x^2=y^2-2$) et on obtient $y^2+ay+b-2=0$, ce qui donne y par résolution d'un second degré, puis x par résolution des équations $y_i=x+1/x$ qui sont aussi du second degré.

Passons maintenant au cas général.

Quitte à diviser par le coefficient du terme de degré 4, toute équation du 4ième degré s'écrit $y^4+ay^3+by^2+cy+d=0$; il suffit alors de poser $y=x-a/4$ pour se ramener à une équation du 4ième degré sans terme de degré 3, c'est-à-dire de la forme $x^4+px^2+qx+r=0$, avec p,q,r complexes : voir le 4) du paragraphe 8) pour plus de précisions.

Si q=0, l'équation est bicarrée et en posant $X=x^2$, on se ramène bien sûr à une (en fait trois) équation du deuxième degré.

Les deux méthodes qui vont être exposées consistent à résoudre $x^4+px^2+qx+r=0$, avec $q\neq 0$, en factorisant, dans C[X], x^4+px^2+qx+r en un produit de deux facteurs du 2ième degré, ce qui est toujours possible d'un point de vue théorique, car dans C[X], tout polynôme est forcément un produit de 4 polynômes du 1er degré, C étant algébriquement clos.

Un petit mot d'histoire : on aurait proposé à Cardan de résoudre une équation du 4ième degré et n'y arrivant pas il a demandé à Ferrari (son secrétaire) de s'en occuper, et c'est à cette occassion que Ferrari a mis au point la méthode ci-dessous, laquelle serait la méthode de résolution du 4ième degré la plus ancienne.

2) Méthode de Ferrari

Soit $x^4+px^2+qx+r=0$, avec p,q,r complexes ($q\neq 0$) l'équation (E) à résoudre .

On considère $R=(x^2+y)^2-(x^4+px^2+qx+r)=(2y-p)x^2-qx+y^2-r$:

R est un polynôme du 2ième degré en x (pour 2y-p non nul) de discriminant $q^2-4(2y-p)(y^2-r)=-8y^3+4py^2+8ry+q^2-4pr$.

On choisit alors y de façon à annuler ce discriminant et on obtient une équation du 3ième degré, que j'appelerai équation de Ferrari :

$$-8y^3+4py^2+8ry+q^2-4pr=0 \quad (F)$$

$y=p/2$ sera solution ssi $-p^3+p^3+4pr+q^2-4pr=0$ soit ssi $q=0$, cas qui a été exclu ; donc pour tout y solution de cette équation (F), 2y-p est non nul et le polynôme R sera bien du second degré et s'écrit alors $R=(2y-p)Q^2$ avec Q polynôme du 1er degré : $Q=x-q/(2(2y-p))$.

D'où $x^4+px^2+qx+r=(x^2+y)^2-(2y-p)Q^2$; mais dans C il existe z tel que $z^2=2y-p$ (si 2y-p est réel >0 alors z est réel, si 2y-p est réel< 0 alors z est imaginaire pur) et ainsi

$x^4+px^2+qx+r=(x^2+y+zQ)(x^2+y-zQ)$ et on est ramené à résoudre deux équations du second degré.

Notons que puisqu'il y a zQ et -zQ, la somme des termes constants des deux facteurs est 2y.

On peut remarquer aussi qu'il peut y avoir 3 factorisations possibles, puisqu'il peut y avoir 3 valeurs possibles pour y, ce qui correspond bien au fait que pour faire un produit de 2 facteurs du 2ième degré à partir de 4 facteurs (distincts 2 à 2) du 1er degré, il y a 3 possibilités qui correspondent aux 3 façons de partitionner un ensemble à 4 éléments (distincts 2 à 2), en 2 ensembles à 2 éléments.

Si p,q,r sont réels la factorisation sera dans R[X] si y est réel et si 2y-p>0, par contre si y est réel et 2y-p<0 elle est dans C[X] et de la forme $(x^2+ax+b)(x^2+a'x+b')$ avec a',b' conjugués de a et b (cas de l'exemple 2 ci-dessous).

Exemple F1 : résoudre $x^4-7x^2-24x-15=0$

$R=(x^2+y)^2-(x^4-7x^2-24x-15)=(2y+7)x^2+24x+y^2+15$

le discriminant est $4(-2y^3-7y^2-30y+39)$ et l'équation $-2y^3-7y^2-30y+39=0$ a une solution évidente y=1 ; pour cette valeur de y on a $R=(3x+4)^2$ et ainsi

$x^4-7x^2-24x-15=(x^2+1)^2-(3x+4)^2=(x^2-3x-3)(x^2+3x+5)$, d'où les quatre solutions $(-3\pm\sqrt{11}i)/2$ et $(3\pm\sqrt{21})/2$.

Exemple F2 : résoudre $x^4+3x^2+6x+10=0$

$R=(x^2+y)^2-(x^4+3x^2+6x+10)=(2y-3)x^2-6x+y^2-10$

le discriminant est $-2y^3+3y^2 20y-21$ et l'équation $-2y^3+3y^2+20y-21=0$ a une solution évidente y=1 ;

pour cette valeur de y on a $R=-(x+3)^2$ et ainsi

$x^4+3x^2+6x+10=(x^2+1)^2+(x+3)^2=(x^2+1+i(x+3))(x^2+1-i(x+3))=(x^2+ix+1+3i)(x^2-ix+1-3i)$: cette fois la factorisation n'est pas dans R[X] (ce n'est pas contradictoire avec le fait qu'il en existe cependant une).

Il suffit alors de résoudre $x^2+ix+1+3i=0$ car en changeant i en -i dans les solutions on aura celles de $x^2-ix+1-3i=0$

$b^2-4ac=-1-4-12i=-5-12i$: il s'agit de trouver les 2 racines 2ième de ce discriminant, donc résoudre $z^2=-5-12i$; en posant z=a+ib avec a et b réels on obtient $a^2-b^2=-5$, ab=-6 et (en passant au module) $a^2+b^2=\sqrt{169}=13$, ce qui donne $a^2=4$, $b^2=9$, donc $a=\pm2$ et $b=\pm3$; mais ab=-6 donc z=a+ib est soit 2-3i, soit -2+3i.

Les 2 solutions de $x^2+ix+1+3i=0$ sont donc (-i+2-3i)/2 et (-i-2+3i)/2 soit 1-2i et -1+i ; donc le 2ième facteur donne 1+2i et -1-i

Les quatre solutions de l'équation initiale sont donc $1\pm2i$ et $-1\pm i$

Remarque : si on veut une décomposition en 2 facteurs de R[X] on groupe les solutions conjuguées ce qui va donner

$x^4+3x^2+6x+10=(x^2-2x+5)(x^2+2x+2)$.

Exemple F3 : résoudre $x^4-9x^2+4x+12=0$

$R=(x^2+y)^2-(x^4-9x^2+4x+12)=(2y+9)x^2-4x+y^2-12$

L'équation (F) de Ferrari est $-8y^3-36y^2+48y+448=0$ ($448=4^2-4\times(-9)\times12$) soit $2y^3+9y^2-24y-112=0$. Les racines rationnelles ne peuvent être (voir conseil pratique du chapitre 5) que p/q avec q divisant 2 et p divisant $112=2^4\times7$: -4 et 7/2 conviennent ; la somme des racines étant -9/2 la 3ième solution est encore -4 qui est double, donc que 2 possibilités pour y et donc que 2 factorisations possibles

y=-4 va donner 2y-p=-8+9=1>0 qui débouche sur une factorisation dans R[X]

y=7/2 va donner 2y-p=7+9=16>0 et qui débouche aussi sur une factorisation dans R[X]

Pour y=-4 on obtient $R=(x-2)^2$ et $(x^4-9x^2+4x+12)=(x^2-4)^2-(x-2)^2=(x^2-x-2)(x^2+x-6)$ d'où les 4 solutions -3,-1 et 2 (double), ...ce qui pouvait se "deviner". En effet les éventuelles racines rationnelles de l'équation de départ ne peuvent qu'être entières et diviser 12 : -3,-1,2 sont effectivement solutions et comme la somme des racines est 0, la 4ième solution est 2, c'est-à-dire 2 est racine double. Mais bon, il s'agissait d'illustrer la méthode.

Exemple F4 : résoudre $x^4+3x^2-2x+2=0$

$R=(x^2+y)^2-(x^4+3x^2-2x+2)=(2y-3)x^2+2x+y^2-2$.

L'équation de Ferrari est $2y^3-3y^2-4y+5=0$ dont une racine évidente est 1 ; pour cette valeur de y on a $R=-(x-1)^2$ donc $x^4+3x^2-2x+2=(x^2+1)^2+(x-1)^2=(x^2+ix+1-i)(x^2-ix+1+i)$.

Là encore il suffit de résoudre $(x^2+ix+1-i)=0$, dont le discriminant est -5+4i et on cherche ses racines 2ièmes : $(a+ib)^2=-5-4i$, avec a et b réels, donne $a^2-b^2=-5$, ab=2, et (en passant au module) $a^2+b^2=\sqrt{41}$ d'où $a+ib=\sqrt{((-5+\sqrt{41})/2)}+i\sqrt{((5+\sqrt{41})/2)}$ ou $-\sqrt{((-5+\sqrt{41})/2)}-i\sqrt{((5+\sqrt{41})/2)}$.

En posant $\alpha=\sqrt{((-5+\sqrt{41})/2)}$ et $\beta=\sqrt{((5+\sqrt{41})/2)}$ les 2 solutions de $x^2+ix+1-i=0$ sont $(-i+\alpha+i\beta)/2$ et $(-i-\alpha-i\beta)/2$ et les 4 solutions de l'équation initiale sont

$(\alpha-i(1-\beta))/2$, $(\alpha+i(1-\beta))/2$,$(-\alpha-i(1+\beta))/2$, $(-\alpha+i(1+\beta))/2$.

Exemple F5 : résoudre $x^4-4x^2-8x+35=0$

$R=(x^2+y)^2-(x^4-4x^2-8x+35)=(2y+4)x^2+8x+y^2-35$

L'équation de Ferrari est $y^3+2y^2-35y-78=0$ dont une racine évidente est 6 (diviseur de 78) ; pour cette valeur de y on a $R=(4x+1)^2$ donc $(x^4-4x^2-8x+35)=(x^2+6)^2-(4x+1)^2=(x^2-4x+5)(x^2+4x+7)$, d'où les quatre solutions $2\pm i$ et$-2\pm\sqrt{3}i$.

Exemple F6 : résoudre $x^4-14x^3+66x^2-115x+66,25=0$. Il s'agit d'un des "killers problems" donnés aux candidats juifs à une université de Moscou (années 1970 à 1980).

On pose $x=y/2$ d'où $y^4-28y^3+264y^2-920y+1060=0$ (F6 bis)

puis $y=z+7$ d'où $z^4-30z^2+32z+353=0$ (F6 ter)

Pour (F6 ter) l'équation (F) de Ferrari est $-8y^3-4\times30y^2+8\times353y+32^2+4\times30\times353=0$, soit $y^3+15y^2-353y-5423=0$.

Là encore, les solutions éventuellement rationnelles ne peuvent qu'être entières et diviser $5423=11\times17\times29$: coup de chance -17 est effectivement une solution.

Le polynôme R de la méthode de Ferrari est alors $R=(2y+30)z^2-32z+y^2-353=-4z^2-32z-64=-(2z+8)^2$ et ainsi $z^4-30z^2+32z+353=(z^2-17)^2+(2z+8)^2=(z^2+2iz-17+8i)(z^2-2iz-17-8i)$.

Là encore (voir exemple F2 de la méthode de Ferrari ci-dessus) il suffit de résoudre $z^2+2iz-17+8i=0$, dont le discriminant est $64-32i=16(4-2i)$ et il suffit de chercher les racines 2ièmes de $(4-2i)$. On utilise la méthode définie à l'exemple F2 : a et b étant réels, $(a+ib)^2=4-2i$ donne $a^2-b^2=4$, $ab=-1$ et $a^2+b^2=2\sqrt{5}$, ce qui donne $a^2=2+\sqrt{5}$, $b^2=\sqrt{5}$ et $ab=-1$:

donc les racines 2ièmes de $4-2i$ sont $\pm(\alpha-i\beta)$ avec $\alpha=\sqrt{(2+\sqrt{5})}$ et $\beta=\sqrt{(-2+\sqrt{5})}$ et ainsi les 2 solutions de $z^2+2iz-17+8i=0$ sont $-i+2(\alpha-i\beta)$ et $-i-2(\alpha-i\beta)$ et les 4 solutions de l'équation (C3 ter) sont :

$2\alpha-(1+2\beta)i$, $2\alpha+(1+2\beta)i$, $-2\alpha-(1-2\beta)i$, $-2\alpha+(1-2\beta)i$.

Bien entendu, comme $x=(z+7)/2$ on en déduit sans difficulté les solutions de l'équation F6 initiale.

<u>Remarque 1</u>

en regroupant les racines conjuguées on va obtenir la factorisation de $z^4-30z^2+32z+353$ dans R[X], en facteurs irréductibles :

$(z^2-4\alpha z+4\alpha^2+(1+2\beta^2)(z^2+4\alpha z+4\alpha^2+(1+2\beta^2)=(z^2-4\sqrt{(2+\sqrt{5})}z+1+8\sqrt{5}+4\sqrt{(-2+\sqrt{5})})(z^2+4\sqrt{(2+\sqrt{5})}z+1+8\sqrt{5}-4\sqrt{(-2+\sqrt{5})})$

<u>Remarque 2</u> (uniquement pour ceux qui s'intéressent à l'irréductibilité....pour l'instant c'est une notion pas indispensable, mais elle le sera pour le chapitre 7).

le polynôme $P(z)=z^4-30z^2+32z+353$ est irréductible sur Q[X] : c'est évident d'après la factorisation dans R[X] trouvée à la remarque 1 en 2 facteurs irréductibles sur R[X] et n'appartenant pas à Q[X] (en effet, aucun regroupement de ces 2 facteurs, à part leur produit, ne peut donner un facteur dans Q[X])

Une autre façon "plus savante" : P s'écrit $P\_3(z)=z^4-z-1$ dans Z/3Z[X], et comme P est unitaire il suffit de montrer l'irréductibilité de P_3 dans Z/3Z[X] pour pouvoir en déduire celle de P dans Q[X].

Si P_3 était réductible dans Z/3Z[X], soit c'est un 1er degré fois un 3ième degré, mais alors il aurait une racine dans Z/3Z ce qui est faux, soit il s'écrit $(az^2+bz+c)(a'z^2+b'z+c')$, les coefficients étant dans Z/3Z, et alors par identification

$aa'=1$, $ab'+a'b=0$, $ac'+a'c+bb'=0$, $bc'+b'c=-1=2$, $cc'=-1=2$

donc $a=a'=1$ ou $a=a'=2$; quitte à multiplier chacun des facteurs par 2 on peut supposer $a=a'=1$, donc $b+b'=0$, $c+c'=b^2$ et $b(c'-c)=2$.
Mais $cc'=2$ n'est possible que pour $(c,c')=(1,2)$ ou $(2,1)$, soit $c+c'=0$, donc $b^2=0$, puis $b=0$, ce qui est en contradiction avec $b(c-c')=0$: P_3 est bien irréductible dans Z/3Z[X].

Exemple F7 : résoudre $x^4-(64/5)x^2-(512/125)x-1024/3125=0$

$R=(x^2+y)-(x^4-(64/5)x^2-(512/125)x-1024/3125)=(2y+64/5)x^2+(512/125)x+y^2+1024/3125$

L'équation (F) de Ferrari a son terme constant nul, car ici q^2-4pr=0, donc y=0 en est une solution "plus" qu'évidente.

Ce qui veut dire que $R=(64/5)x^2+(512/125)x+1024/3125$ doit être une identité remarquable, à un coefficient multiplicatif près ($R=-pQ^2$ avec Q du 1er degré : voir présentation de la méthode).

Effectivement $R=(64/5)(x+4/25)^2$, et l'équation proposée s'écrit donc $x^4-(64/5)(x+4/25)^2=0$; pour moi ca ne sautait pas aux yeux à la lecture de l'équation.

En tout cas Ferrari permet de le voir tout de suite.

L'équation équivaut donc à $(x^2-(8\sqrt{5}/5)x-32\sqrt{5}/125)(x^2+(8\sqrt{5}/5)x+32\sqrt{5}/125)=0$.

Le discriminant du 2ième facteur est $64(25-2\sqrt{5})/125$: il a donc pour racines $(4/25)(-5\sqrt{5}\pm\sqrt{(5(25-2\sqrt{5}))})$ et donc les racines du 1er facteur sont $(4/25)(5\sqrt{5}\pm\sqrt{(5(25+2\sqrt{5}))})$.

<u>Remarque 1</u>

Cette équation intervient dans la résolution par radicaux de l'équation $x^5+20x+32=0$: la somme des racines 5ièmes des quatres racines de l'équation précédente $x^4-(64/5)x^2-(512/125)x-1024/3125=0$ est la racine réelle ($\approx -1{,}36396$) de $x^5+20x+32=0$.

<u>Remarque 2</u>

En fait si q^2-4pr=0 (donc p est non nul, puisque on a supposé q non nul)

l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$ s'écrit $x^4+p(x+q/(2p))^2=0$, ce qui est de la forme $A^2-B^2=0$ et permet tout de suite une factorisation dans C en un produit de deux facteurs du second degré ; si on ne le voit pas à la simple "lecture" de l'équation, pas de souci, puisque Ferrari nous le fera remarquer tout de suite, le terme constant de son équation étant nul.

Exemple F8 : résoudre $x^4+(-9+12i)x^2+(34-2i)x+12-54i=0$

L'équation de Ferrari est $-8y^3+4(-9+12i)y^2+8(12-54i)y-1008-2656i=0$ et elle n'a pas de racine évidente!

Mais comme j'ai "fabriqué" l'équation à partir des solutions, j'avais sous la main une factorisation en produit de deux facteurs du 2ième degré : y est la moitié de la somme des termes constants de ces deux facteurs (voir début de la méthode de Ferrari où cela a été signalé)...je peux alors donner l'indication suivante :

y= -8i ou -6+8i ou 21-20i.

Ce qui "doit" amener aux quatre solutions suivantes de l'équation de départ : 3-3i, -4+i, -1+i, 2+i.

3) Méthode de Descartes

<u>Proposée sous forme d'exercice (</u>solution juste après, ouf......)

<u>Question 1</u> Montrer que le polynôme X^4+pX^2+qX+r, avec p,q,r complexes et $q\neq 0$, se factorise en $(X^2+aX+b)(X^2+cX+d)$, si et seulement si a^2 est solution de l'équation

$$A^3+2pA^2+(p^2-4r)A-q^2=0 \quad (D)$$

d'inconnue A, appelée équation de Descartes, et b,c,d étant alors des fonctions rationnelles de a que l'on précisera.

Montrer que les solutions de $x^4+px^2+qx+r=0$ (E) sont des combinaisons linéaires des racines carrées des trois solutions de l'équation (D) de Descartes.

Remarque : d'un point de vue pratique, pour résoudre (E), on peut se contenter de chercher une solution de (D) et en prendre une racine carrée, a, et résoudre les deux équations $x^2+ax+b=0$, $x^2+cx+d=0$.

Cependant, p,q,r étant dans Q, ces formules permettent de caractériser le fait que les solutions de (E) sont constructibles à la régle et au compas (voir l'ouvrage de J-C Carréga Théorie des corps, exercice 24).

Question 2 :

Exemple D1 : résoudre $x^4-7x^2-24x-15=0$

Exemple D2 : résoudre $x^4+3x^2+6x+10=0$

Exemple D3 : résoudre $x^4-9x^2+4x+12=0$

Exemple D4 : résoudre $x^4+3x^2-2x+2=0$

Exemple D5 : résoudre $x^4-4x^2-8x+35=0$

Exemple D6 : résoudre $x^4-14x^3+66x^2-115x+66{,}25=0$

Exemple D7 : $x^4-(64/5)x^2-(512/125)x-1024/3125=0$

Exemple D8 : résoudre $x^4+(-9+12i)x^2+(34-2i)x+12-54i=0$

Remarque : lors du premier exercice du concours général 2011
on tombe sur l'équation $x^4-159x^2+840x-588=0$!
Voir sa résolution par la méthode de Descartes
dans la correction de cet exercice du cg, cad l'exercice 55 de ce lien.

Question 3 Montrer que si p,q,r sont réels alors x^4+px^2+qx+r est un produit de deux polynômes de R[X] du second degré :

1ère méthode : utiliser ce qui précede

2ième méthode : utiliser le résultat sur la nature des polynômes irréductibles dans R[X].

Question 4 :

p, q, r étant cette fois dans Q, soient $P(X)=X^4+pX^2+qX+r$ et $R(X)=X^3+2pX^2+(p^2-4r)X-q^2$.
Montrer que si P et R n'ont aucune racine rationnelle, alors P est irréductible sur Q.

solution de l'exercice :

solution de la question 1 : par identification on obtient les 4 conditions suivantes :

$a+c=0$; $ac+b+d=p$; $ad+bc=q$; $bd=r$ $\Leftrightarrow$ $c=-a$; $b+d=p+a^2$; $d-b=q/a$ (car $a(d-b)=q$ et $q\neq0$, donc $a\neq0$) ; $bd=r$

$\Leftrightarrow$ $c=-a$; $d=(p+a^2+q/a)/2$; $b=(p+a^2-q/a)/2$; $bd=r$

$\Leftrightarrow$ $c=-a$; $d=(p+a^2+q/a)/2$; $b=(p+a^2-q/a)/2$; $(p+a^2+q/a)(p+a^2-q/a)=4r$

La dernière condition s'écrit $a^6+2pa^4+(p^2-4r)a^2-q^2=0$, qui est bien une équation du 3ième degré en $a^2=A$ et que j'appelerai équation de Descartes :

$$\boxed{A^3+2pA^2+(p^2-4r)A-q^2=0 \quad (D)}$$

que l'on sait résoudre, cf les chapitres précedents.

Notons que l'on peut obtenir 3 valeurs distinctes de a^2, donc 6 valeurs distinctes de a qui donneront, là aussi, 3 factorisations différentes (changer a en -a donne la même factorisation).

Exprimons maintenant les solutions de l'équation (E) $x^4+px^2+qx+r=0$ à l'aide des racines carrées des trois solutions A_1, A_2, A_3 de (D).
Pour cela notons a_1, a_2, a_3 des racines carrées respectives de A_1, A_2, A_3 telles que $\mathbf{a_1a_2a_3=q}$ (cela est possible car $A_1A_2A_3=q^2$).
Les solutions de (E) sont les solutions de $x^2+ax+b=0$ et $x^2+cx+d=0$, avec $a=a_1$, $c=-a_1$, $b=(p+a_1^2-q/a_1)/2$ et $d=(p+a_1^2+q/a_1)/2$.
Calculons le discriminant de ces équations du second degré.

> $a^2-4b=A_1-2p-2A_1+2q/a_1=-A_1-2p+2a_2a_3$,
> mais $A_1+A_2+A_3=-2p$, ce qui donne
> $a^2-4b=A_2+A_3+2a_2a_3=(a_2+a_3)^2$

Et donc les solutions de $x^2+ax+b=0$ sont $(-a_1\pm(a_2+a_3))/2$; de même les solutions de $x^2+cx+d=0$ sont $(a_1\pm(a_2-a_3))/2$;

Finalement les quatre solutions de (E) sont

$$\mathbf{(-a_1+a_2+a_3)/2\ ;\ (-a_1-a_2-a_3)/2\ ;\ (a_1+a_2-a_3)/2\ ;\ (a_1-a_2+a_3)/2}$$

<u>Remarque 1</u> : les calculs ci-dessus exigent $q\neq 0$, vu la division par a_1 ; **en fait, si q=0, les quatre racines de (E) sont encore données par les formules ci-dessus**, où les a_i sont toujours des racines 2ièmes des A_i, avec $\prod a_i=q$; mais comme q=0, (D) a une solution qui est nulle, et donc cette condition est forcément vérifiée quelque soit le choix des racines 2ièmes des deux autres solutions de (D).

> Vérifions donc qu'en prenant, par exemple, $A_1=0$ (donc $a_1=0$) et a_2, a_3 des racines 2ièmes quelconques de A_2 et A_3 (les deux autres solutions de (D), à savoir les solutions de $A^2+2pA+p^2-4r=0$) alors
> $x_1=(a_2+a_3)/2$, $x_2=(-a_2-a_3)/2$, $x_3=(a_2-a_3)/2$, $x_4=(-a_2+a_3)/2$ sont effectivement les quatre solutions de (E).
> x_1 et x_2 sont les racines 2ièmes de $s=(a_2+a_3)^2/4$ et
> x_3 et x_4 sont les racines 2ièmes de $s'=(a_2-a_3)^2/4$.
> Or $s+s'=(A_2+A_3)/2=-p$
> et $ss'=((a_2^2+a_3^2)^2-4a_2^2a_3^2)/16=((A_2+A_3)^2-4A_2A_3)/16=(4p^2-4(p^2-4r))/16=r$.
> Donc s et s' sont les solutions de $x^2+px+r=0$, et les racines 2ièmes de s et s' sont donc bien les quatre solutions de $x^4+px^2+r=0$, soit (E).

Bien entendu, cet aspect est sans intérêt en pratique (résoudre une bicarrée est immédiat), mais cette remarque est utile pour le calcul de discriminant (voir plus loin le paragraphe sur discriminant d'un polynôme du 4ième degré) et aussi pour la recherche des groupes de Galois des polynômes du 4ième degré.

<u>Remarque 2</u> :
dans le cas $q\neq 0$, si $a_1a_2a_3=-q$ (au lieu de q), les formules ci-dessus donnant les quatre solutions de (E) sont fausses ; par exemple dans l'exemple D2 ci-dessous, si on prend $a_1=-3i$, $a_2=i$, $a_3=-2$, alors $\prod a_i=-q$ et $(-a_1+a_2+a_3)/2=-1+2i$ n'est pas une solution de l'équation.
Je laisse le lecteur vérifier que les formules ci-dessus donnant les quatre solutions de (E) deviennent exactes, dans le cas $a_1a_2a_3=-q$, en remplacant (par exemple) a_1 par son opposé $-a_1$.

<u>solution de la question 2</u>

Résolution de D1 : $x^4-7x^2-24x-15=0$

a^2 est solution de $A^3-14A^2+109A-576=0$; on peut prendre A=9 d'où a=3 ou a=-3 ce qui donne comme factorisation $(x^2+3x+5)(x^2-3x-3)$, c'est-à-dire la même que celle obtenue par la méthode de Ferrari (exemple F1) d'où les quatre solutions $(-3\pm\sqrt{11}i)/2$ et $(3\pm\sqrt{21})/2$.

Résolution de D2 : $x^4+3x^2+6x+10=0$

a^2 est solution de $A^3+6A^2-31A-36=0$ dont les solutions sont -9,-1,4.

Si on prend A=4, soit a=2 ou -2, on obtient comme factorisation $(x^2+2x+2)(x^2-2x+5)$ qui n'est pas la même que celle obtenue avec Ferrari (exemple F2) mais redonne bien les mêmes solutions : $1\pm2i$ et $-1\pm i$.

Pour obtenir la même factorisation que Ferrari, il aurait fallu prendre A=-1, d'où a=i ou -i.

<u>Remarque</u> : ici, il est facile de trouver les racines carrées des solutions de (D) : on peut prendre $a_1=3i$ comme racine carrée de -9, $a_2=i$ comme racine carrée de -1 et $a_3=-2$ comme racine carrée de 4. On a alors $a_1a_2a_3=6=q$ et donc les solutions de D2 sont (voir fin de la solution de la question 1) :
$(-a_1+a_2+a_3)/2=-1-i$; $(-a_1-a_2-a_3)/2=1-2i$; $(a_1+a_2-a_3)/2=1+2i$; $(a_1-a_2+a_3)/2=-1+i$

Résolution de D3 : $x^4-9x^2+4x+12=0$

Cet exemple a déjà été traité avec la méthode de Ferrari (exemple F3) ; certes les solutions de l'équation proposée sont "évidentes", mais là aussi il s'agit d'illustrer la méthode.

a^2 est solution de $A^3-18A^2+33A-16=0$; A=1 est solution d'où a=1 ou -1 ce qui donne comme factorisation $(x^2+x-6)(x^2-x-2)$, la même que celle donnée par Ferrari ; les quatre solutions sont -3,-1, 2 (double).

Résolution de D4 : $x^4+3x^2-2x+2=0$

Cet exemple a aussi déjà été traité avec la méthode de Ferrari (exemple F4) ; a^2 est solution de $A^3+6A^2+A-4=0$, qui a pour solution évidente -1, qui conduit à a=i ou -i et on obtient comme factorisation exactement celle donnée par Ferrari.

Résolution de D5 : $x^4-4x^2-8x+35=0$

a^2 est solution de $A^3-8A^2-124A-64=0$; bien entendu pour la résoudre, la 1ère chose est de chercher s'il y a une solution rationnelle (voir conseil pratique du chapitre 5), soit entière ici et elle ne peut provenir que des diviseurs de -64 : coup de chance A=16 est solution, donc on peut prendre a=4 ou a=-4 ce qui donne (dans les deux cas) comme factorisation $(x^2-4x+5)(x^2+4x+7)$, celle obtenue avec Ferrari ; d'où les quatre solutions $2\pm i$ et$-2\pm\sqrt{3}i$.

Résolution de D6 : $x^4-14x^3+66x^2-115x+66{,}25=0$

On pose x=y/2 d'où $y^4-28y^3+264y^2-920y+1060=0$

puis y=z+7 d'où $z^4-30z^2+32z+353=0$

Essayons la méthode de Descartes : pour cette dernière équation, l'équation (D) de Descartes est $A^3-60A^2-512A-1024=0$ $(-512=30^2-4\times353)$.

Les solutions éventuellement rationnelles ne peuvent qu'être entières et diviser 1024, donc de la forme $\pm2^k$ et ...-4 est effectivement solution ; donc on peut prendre a=2i, c=-a=-2i et $b=(p+a^2-q/a)/2=-17+8i$ et $d=(p+a^2+q/a)/2=-17-8i$ et on obtient exactement la même factorisation que Ferrari (exemple F6).

Résolution de D7 : $x^4-(64/5)x^2-(512/125)x-1024/3125=0$

L'équation de Descartes est $A^3-(128/5)A^2+(516096/3125)A-262144/15625=0$: une solution "évidente" est visible? En tout cas si on doit chercher une éventuelle solution rationnelle, il va y avoir beaucoup de cas à envisager!

Si on retourne à l'exemple F7, on s'aperçoit que l'équation de Ferrari, elle , a une solution évidente 0, car on est dans le cas où $q^2-4pr=0$.

Regardons dans ce cas, et de façon littérale, ce que devient l'équation de Descartes :

$A^3+2pA^2+(p^2-4r)A+4pr=0$, soit $A(A+p)^2-4r(A+p)=0$ et donc $-p$ est une solution!

Je laisse le lecteur vérifier que 64/5 est effectivement solution de l'équation de Descartes de l'exemple considéré ci-dessus, et....s'il en a envie, il peut terminer les calculs!

En tout cas, sur ce coup, je trouve Ferrari plus efficace que Descartes.

Résolution de D8 : $x^4+(-9+12i)x^2+(34-2i)x+12-54i=0$

.La méthode de Descartes donne comme équation du 3ième degré $A^3+2(-9+12i)A^2-111A-1152+136i=0$:

elle n'a pas de racine évidente!

Mais comme j'ai "fabriqué" l'équation à partir des solutions, j'avais sous la main une factorisation en produit de deux facteurs du 2ième degré et A étant le carré du coefficient de x de l'un des facteurs, ..je peux alors donner l'indication suivante :

$A= -3+4i$ ou $6-4i$ ou $-9/2+2i$.

Ce qui "doit" amener aux quatre solutions suivantes de l'équation de départ : $3-3i$, $-4+i$, $-1+i$, $2+i$.

<u>solution de la question 3</u>

1ière méthode : il s'agit de montrer que l'on peut toujours choisir a réel (car alors b,c,d le seront) et donc que l'équation $A^3+2pA^2+(p^2-4r)A-q^2=0$ a toujours une solution réelle positive, ce qui résulte du fait que le membre de gauche est <0 pour A=0 et qu'il est> 0 pour A suffisamment grand.

2ième méthode : elle repose sur le fait que dans R[X] les seuls polynômes irréductibles sont ceux du 1er degré et ceux du 2ième degré (avec un discriminant négatif) donc

soit P ne comporte que des facteurs irréductibles du 1er degré et via deux regroupements on obtient un produit de deux facteurs du 2ième degré

soit P comporte un seul facteur irréductible du 2ième degré et deux du 1er degré et même conclusion en regroupant les deux facteurs du 1er degré

soit P comporte deux facteurs irréductibles du 2ième degré et là on a tout de suite la conclusion.

<u>solution de la question 4</u>

- P ne peut être factorisé par un polynôme dans Q[X] du 1er degré, puisqu'il n'a pas de racine rationnelle
- P ne peut être le produit $(X^2+aX+b)(X^2+cX+d)$, avec a,b,c,d dans Q, car a^2 étant racine de R (voir question 1), R aurait une racine rationnelle, ce qui est exclu

Donc P est bien irréductible sur Q.

4) Lien entre les méthodes de Ferrari et Descartes pour résoudre $x^4+px^2+qx+r=0$ avec p,q,r réels et q non nul.

Résolvantes

Supposons que l'équation ait ses solutions conjuguées 2 à 2 (ce qui ne veut pas dire qu'elles soient toutes imaginaires : l'une peut être réelle double) : u,u',v,v' (ici le ' désignera exclusivement le conjugué).

Donc $x^4+px^2+qx+r=((x-u)(x-v))((x-u')(x-v'))=(x^2+ax+b)(x^2+a'x+b')$ (point de départ de la méthode de Descartes, mais là a',b' sont les conjugués de a et b).

Par identification on obtient a+a'=0, aa'+b+b'=p, ab'+a'b=q et bb'=r ; donc a est imaginaire pur et a=it avec t réel.

En posant b=y+iw (y,w réels) on obtient $t^2+2y=p$, 2tw=q, $y^2+w^2=r$, d'où $4t^2(r-y^2)=q^2$ soit $4(p-2y)(r-y^2)=q^2$, ce qui donne finalement $-8y^3+4py^2+8ry+q^2-4pr=0$ qui est exactement l'équation de Ferrari.

Mais ici on cherche exclusivement une solution réelle y : il y en a effectivement toujours une (car p,q,r sont réels et il s'agit d'un degré impair) et y≠p/2 (car q non nul, voir introduction).

Par contre t doit être aussi réel et il le sera que si p-2y>0 (w=q/(2t) sera aussi réel) et on obtiendra alors effectivement une factorisation de la forme $(x^2+ax+b)(x^2+a'x+b')$; cet aspect avait déjà été remarqué à la fin de la présentation de la méthode de Ferrari et constaté pour les exemples F2, F4, F6 de Ferrari.

Bien entendu lorsque pour toute solution réelle y de l'équation (F) de Ferrari on a p-2y<0, on ne peut pas obtenir une factorisation de la forme $(x^2+ax+b)(x^2+a'x+b')$: voir l'exemple F3 de la méthode de Ferrari.

Les équations de Ferrari et Descartes permettent, chacune, de résoudre les équations du 4ième degré ; à ce titre chacune est appelée une résolvante de l'équation du 4ième degré.

5) Lagrange et les méthodes de Ferrari et Descartes

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les quatre solutions dans C de l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$, p, q, r étant complexes.

1) **Une autre façon d'obtenir l'équation de Ferrari**

Posons $s=(x_1x_2+x_3x_4)/2$: il est clair qu'en considérant les 24 permutations de x_1,x_2,x_3,x_4, s ne peut prendre que les 3 valeurs suivantes (car x_1 est "soit avec" x_2, "soit avec" x_3, "soit avec" x_4) :

$s_1=(x_1x_2+x_3x_4)/2$, $s_2=(x_1x_3+x_2x_4)/2$, $s_3=(x_1x_4+x_2x_3)/2$.

Formons l'équation du 3ième degré dont les 3 racines sont ces 3 valeurs :

il faut calculer $s_1+s_2+s_3$, $s_1s_2+s_1s_3+s_2s_3$ et $s_1s_2s_3$, sachant que $t_1=x_1+x_2+x_3+x_4=0$,
$t_2=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=p$, $t_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-q$ et $t_4=x_1x_2x_3x_4=r$.

Posons $s'_i=2s_i$.

$s'_1+s'_2+s'_3=p$

$s'_1s'_2=x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_4+x_1x_3^2x_4+x_2x_3x_4^2$

$s'_1s'_3=x_1^2x_2x_4+x_1x_2^2x_3+x_2x_3^2x_4+x_1x_3x_4^2$

$s'_2s'_3=x_1^2x_3x_4+x_2^2x_3x_4+x_1x_2x_3^2+x_1x_2x_4^2$

$s'_1s'_2+s'_1s'_3+s'_2s'_3=x_1(t_3-x_2x_3x_4)+x_2(t_3-x_1x_3x_4)+x_3(t_3-x_1x_2x_4)+x_4(t_3-x_1x_2x_3)$

soit $s'_1s'_2+s'_1s'_3+s'_2s'_3=t_1t_3-4t_4=-4t_4=-4r$.

$s'_1s'_2s'_3=(x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_4+x_1x_3^2x_4+x_2x_3x_4^2)(x_1x_4+x_2x_3)$, et en développant courageusement

$s'_1s'_2s'_3=x_1^3x_2x_3x_4+x_1^2x_2^2x_4^2+x_1^2x_3^2x_4^2+x_1x_2x_3x_4^3+x_1^2x_2^2x_3^2+x_1x_2^3x_3x_4+x_1x_2x_3^3x_4+x_2^2x_3^2x_4^2$

$s'_1s'_2s'_3=t_4(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)+t_3^2-2t_4t_2=t_4(t_1^2-2t_2)+t_3^2-2t_4t_2=r(-2p)+q^2-2rp=q^2-4rp$.

Donc les s'_i sont les racines de $x^3-px^2-4rx+4pr-q^2=0$, mais $s'_i=2s_i$ et ainsi

<u>s_1, s_2, s_3 sont les racines</u> de $-8y^3+4py^2+8ry+q^2-4pr=0$: <u>c'est l'équation de Ferrari!!!</u> (qui est équivalente à $4(2y-p)(y^2-r)=q^2$).

Exploitons ce résultat afin d'obtenir les solutions x_1, x_2, x_3, x_4 de $x^4+px^2+qx+r=0$, dans le cas $q\neq 0$ (si $q=0$, l'équation est bicarrée, pas de problème).

Soit y une solution de cette équation de Ferrari.

Quitte à réordonner les x_i, on peut supposer que $x_1x_2+x_3x_4=2y$; mais $x_1x_2x_3x_4=r$ et donc $u=x_1x_2$ et $v=x_3x_4$ sont les racines de $X^2-2yX+r=0$ et donc u et v sont connus (à l'aide de radicaux).

Par ailleurs $u(x_3+x_4)+v(x_1+x_2)=-q$ et $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=0$ ce qui donne ($q\neq 0$ entraîne $u\neq v$) $x_1+x_2=q/(u-v)$ et $x_3+x_4=-q/(u-v)$, et ainsi

x_1 et x_2 sont les racines de $X^2-qX/(u-v)+u=0$

x_3 et x_4 sont les racines de $X^2+qX/(u-v)+v=0$

et l'équation $x^4+px^2+qx+r=0$ est résolue, cela en passant par la résolution d'une équation du 3ième degré et de 3 équations du second degré ; et donc les quatre solutions (dans C) d'une équation du 4ième dégré s'obtiennent par radicaux (éventuellement emboîtés) portant sur les coefficients de l'équation.

En fait ces 3 équations du second degré sont obtenues par résolution du systéme de 4 équations à 4 inconnues :

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$, $x_1x_2+x_3x_4=2y$, $x_1x_2(x_3+x_4)+x_3x_4(x_1+x_2)=-q$ et $x_1x_2x_3x_4=r$, appelées les résolvantes de Lagrange.

Cela conduit à la factorisation suivante :

$x^4+px^2+qx+r=(x^2-qX/(u-v)+u)(x^2+qX/(u-v)+v)=x^4+(u+v-(q^2/(u-v)^2)x^2+qx+uv$, mais $(u-v)^2=(u+v)^2-4uv=4y^2-4r$ et $q^2/(4y^2-4r)=2y-p$ (équation de Ferrari) d'où

$x^4+px^2+qx+r=x^4+(2y-(2y-p)x^2+qx+r=(x^2+y)^2-((2y-p)x^2-qx+y^2-r)$ et on reconnaît exactement le début de la méthode de Ferrari.

En fait cette "explication" de la méthode de Ferrari a été donnée par <u>Lagrange</u> en 1770, 1771, donc bien postérieurement à Ferrari.

Je cite un extrait dela brochure APMEP n°83 de 1991 (Fragments d'histoire des mathématiques III) :

"C'est le mérite de Lagrange d'avoir réalisé une étude systématique des nombreuses méthodes de résolution des équations de degré 3 ou 4 apparemment distinctes, afin d'en extraire, les points communs, les idées vraiment efficaces, et d'en déduire une perception globale du problème".

2)**<u>Une autre façon d'obtenir l'équation de Descartes</u>.**

Au lieu de considérer les $s_i=2s'_i$ qui sont les sommes de deux produits deux à deux des quatre racines x_i, on peut considérer les produits de deux sommes deux à deux de ces quatre racines :

$u=(x_1+x_2)(x_3+x_4)$, $v=(x_1+x_3)(x_2+x_4)$, $w=(x_1+x_4)(x_2+x_3)$.

Pour former l'équation du 3ième degré dont u,v,w sont les racines, j'exploite les calculs précédents car

$u=s'_2+s'_3$, $v=s'_1+s'_3$, $w=s'_1+s'_2$. On en déduit

$u+v+w=2(s'_1+s'_2+s'_3)=2p$

$uv+uw+vw=3(s'_1s'_2+s'_1s'_3+s'_2s'_3)+s'^2_1+s'^2_2+s'^2_3=-12r+s'^2_1+s'^2_2+s'^2_3$

mais $s'^2_1+s'^2_2+s'^2_3=(s'_1+s'_2+s'_3)^2-2(s'_1s'_2+s'_1s'_3+s'_2s'_3)=p^2-2(-4r)$ et $uv+uw+vw=-12r+p^2+8r=p^2-4r$

$uvw=(s'_2+s'_3)(s'_1+s'_3)(s'_2+s'_3)=(p-s'_1)(p-s'_2)(p-s'_3)=p^3-(s'_1+s'_2+s'_3)p^2+(s'_1s'_2+s'_1s'_3+s'_2s'_3)p-s'_1s'_2s'_3$

$uvw=p^3-p^3+(-4r)p-(q^2-4rp)=-q^2$

[façon directe d'arriver à ce résultat :

$(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)=$

$(x_1^2+x_1x_3+x_1x_2+x_2x_3)(x_1+x_4)=x_1^2(x_1+x_2+x_3+x_4)+x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=q$, puisque $x_1+x_2+x_3+x_4=0$;

et toujours d'après $x_1+x_2+x_3+x_4=0$, on a $uvw=(-(x_1+x_2)^2)(-(x_1+x_3)^2)(-(x_1+x_4)^2)=-q^2$].

u,v,w sont donc les racines de l'équation $x^3-2px^2+(p^2-4r)x+q^2=0$, et <u>-u,-v-,w sont les racines de</u> $A^3+2pA^2+(p^2-4r)A-q^2=0$ <u>qui est exactement l'équation de Descartes!</u>

Evidemment, ayant u,v, w par résolution de cette équation, comme $(x_1+x_2)+(x_3+x_4)=0$, x_1+x_2 et x_3+x_4 sont solutions de $X^2+u=0$ et donc (3ième degré suivi d'un 2ième) s'obtiennent par radicaux portant sur p,q,r.

De même pour x_1+x_3 et x_2+x_4 qui sont solutions de $X^2+v=0$ et pour x_1+x_4 et x_2+x_3 qui sont solutions de $X^2+w=0$.

Précisons un peu la façon d'obtenir x_1,x_2,x_3,x_4 dans le cas $q\neq0$ (si q=0, l'équation de départ est bicarrée, pas de problème) :

$x_1=[(x_1+x_2)+(x_1+x_3)+(x_1+x_4)]/2$ (car la somme des x_i est nulle)

$x_2=[(x_1+x_2)-(x_1+x_3)-(x_1+x_4)]/2$

$x_3=[-(x_1+x_2)+(x_1+x_3)-(x_1+x_4)]/2$

$x_4=[-(x_1+x_2)-(x_1+x_3)+(x_1+x_4)]/2$.

Ceci prouve que les x_i s'obtiennent par radicaux, puisque c'est le cas de x_1+x_2, x_1+x_3, x_1+x_4.

Mais en fait on a deux choix pour x_1+x_2 : les deux racines 2ièmes de -u, soient r et -r

deux choix pour x_1+x_3 : les deux racines 2ièmes de -v, soient r' et -r'

deux choix pour x_1+x_4 : les deux racines 2ièmes de -w, soient r'' et -r''.

Or si on prend $x_1+x_2=r$, $x_1+x_3=r'$, $x_1+x_4=r''$, on obtient effectivement x_1,x_2, x_3, x_4, mais si on prend $x_1+x_2=-r$, $x_1+x_3=-r'$, $x_1+x_4=-r''$, on va obtenir comme solutions les opposées des précédentes, ce qui pourrait faire 8 racines....ce qui est gênant!

En fait (voir ci-dessus la façon directe d'obtenir $uvw=-q^2$) on a $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)=q$.

Donc, x_1+x_2 et x_1+x_3 étant choisis (forcément non nuls, puique q a été ici choisi non nul), x_1+x_4 est imposé : $x_1+x_4=q/((x_1+x_2)(x_1+x_3))$.

Par exemple si on prend $x_1+x_2=r$ et $x_1+x_3=r'$ alors $x_1+x_4=q/(rr')$, qui doit faire r'' ou -r'', ce qui va donner les quatres solutions x_1,x_2,x_3,x_4.

Je laisse le lecteur vérifier que

si on prend $x_1+x_2=r$ et $x_1+x_3=-r'$ alors x_1 et x_2 s'échangent ainsi que x_3 et x_4

si on prend $x_1+x_2=-r$ et $x_1+x_3=r'$ alors x_1 et x_4 s'échangent ainsi que x_2 et x_3

si on prend $x_1+x_2=-r$ et $x_1+x_3=-r'$ alors x_1 et x_3 s'échangent ainsi que x_2 et x_4 .

<u>Remarque</u> :

puisque $x_1+x_2+x_3+x_4=0$ on a $-u=(x_1+x_2)^2$, $-v=(x_1+x_3)^2$, $-w=(x_1+x_2)^2$ et ainsi $(x_1+x_2)^2$, $(x_1+x_2)^2$, $(x_1+x_2)^2$ sont les solutions de l'équation de Descartes.

D'où encore <u>une autre façon que l'on peut rencontrer de présenter l'équation de Descartes</u> :

on pose $x_1=(a+b+c)/2$, $x_2=(a-b-c)/2$, $x_3=(-a+b-c)/2$, $x_4=(a-b+c)/2$ et on forme l'équation du 3ième degré ayant a^2, b^2, c^2 comme racines ; cette équation est forcément l'équation de Descartes puisqu'en fait $a=x_1+x_2$, $b=x_1+x_3$, $c=x_1+x_4$.

Ayant a^2, b^2, c^2 par résolution de cette équation du 3ième degré, on obtient a,b,c par radicaux, donc deux choix pour chacun, mais comme précédemment a et b étant choisis il faut prendre $c=q/(ab)$ et on obtient x_1,x_2,x_3,x_4.

A titre de complément, vérifions directement que a^2, b^2, c^2 sont solutions de l'équation de Descartes.

$a^2+ b^2+ c^2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+x_4{}^2+2x_1{}^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4)$

$=(x_1+x_2+x_3+x_4)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)+2x_1(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$=0^2-2p+2x_1\times 0=-2p$.

$abc=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4)=q$ (voir ci-dessus l'autre façon de calculer uvw), d'où $a^2b^2c^2=q^2$

et

$16x_1x_2x_3x_4=(a+b+c)(a-b-c)(-a+b-c)(-a-b+c)=(a^2-(b+c)^2)(a^2-(b-c)^2)$

$=a^4-a^2(b-c)^2-a^2(b+c)^2+(b^2-c^2)^2$

$=a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$

$=(a^2+b^2+c^2)^2-4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$

d'où $16r=4p^2-4(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)$ et $a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=p^2-4r$ et ainsi a^2, b^2, c^2 sont solutions de $X^3+2pX^2+(p^2-4r)X-q^2=0$, qui est bien l'équation de Descartes.

6) Une conclusion sur les méthodes de Ferrari et Descartes

Quelle est la meilleure méthode?

Les deux méthodes de Ferrari et Descartes reposent sur la résolution d'une équation du 3ième degré, les divers exemples ne me semblant pas favoriser l'une plutôt que l'autre :

soit les deux équations de Ferrari et Descartes ont une solution "évidente", soit elles n'en n'ont pas, et la plupart du temps (pas toujours , voir exemples F2 et D2) les deux méthodes tombent sur la même factorisation, ce qui n'est pas trop étonnant puisqu'il y a au plus 3 factorisations vraiment distinctes de x^4+px^2+qx+r en produit de deux facteurs du 2ième degré, voir début de la méthode de Ferrari.

On retrouve cette similitude dans le cas p=0 (je n'ai fait aucun exemple correspondant) car alors l'équation de Descartes s'écrit $-8y^3+8ry+q^2=0$ et celle de Descartes s'écrit $A^3-4rA-q^2=0$; les deux équations ont donc les mêmes solutions au coefficient 2 près! A noter qu'on peut démontrer que toute équation du 4ième degré se "ramène" à $x^4+qx+r=0$: voir annexe 3.

Cependant lorsqu'il n'y a pas de solutions "évidentes" aux équations de Ferrari et Descartes (F8 et D8), on risque d'avoir un travail supplémentaire avec la méthode de Descartes : il faudra résoudre $A^2=a$, avec un a compliqué!

Il y a un autre cas où Ferrari a l'avantage : c'est lorsque $q^2-4pr=0$.

En effet dans ce cas Ferrari donne immédiatement la réponse (voir exemple F7 et sa remarque 2), par contre pour Descartes ce n'est pas le cas (voir exemple D7).

Notons enfin que si aucune des équation du 3ième degré de Descartes ou de Ferrari n'a de solution évidente (heureusement, dans les exemples ci-dessus il y avait toujours une solution évidente... sauf dans le cas des exemples F8 et D8), vu que les formules de Cardan ne sont pas très simples, trouver les solutions exactes de l'équation du 4ième degré risque d'être très lourd. Il faut vraiment en avoir besoin pour se lancer dans le calcul, sinon on peut se contenter de valeurs approchées via les méthodes "habituelles" de résolution numérique d'équations.

Cependant si ces deux méthodes peuvent être très lourdes d'un point de vue pratique, d'un point de vue théorique elles permettent de prouver (voir le paragraphe 5) que pour toute équation du 4ième degré, ses racines (dans C) s'obtiennent à l'aide de radicaux (éventuellement emboîtés) portant sur les coefficients de l'équation : on dit que l'équation est résoluble par radicaux (voir le chapitre 7 suivant où cette notion sera précisée).

Un dernier point : une situation très agréable pour résoudre un 4ième degré est l'équation bicarrée pour laquelle on n'a pas besoin des méthodes ci-dessus (voir introduction). Or on peut ramener toute équation du 4ième degré à une équation bicarrée : voir annexe 3 ; donc le lecteur pourrait se demander pourquoi je n'ai pas envisagé ici cette méthode? Réponse à cette même annexe 3!

7) Formules (explicites) de Cardan-Ferrari-AP de résolution d'une équation de degré 4 à coefficients complexes avec au plus 5 radicaux : quatre racines 2ièmes, une racine 3ième.

Les quatre solutions de $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$
sont

$-a/4+(-z-(\Delta_1)^{1/2})/2$ $-a/4+(-z+(\Delta_1)^{1/2})/2$ $-a/4+(z-(\Delta_2)^{1/2})/2$ $-a/4+(z+(\Delta_2)^{1/2})/2$
(en cas de solutions multiples, certaines des solutions ci-dessus seront évidemment égales)
voir note 1

z, Δ_1, Δ_2, s'obtenant ainsi :

$p=-3a^2/8+b$, $q=a^3/8-ab/2+c$, $r=-3a^4/256+ba^2/16-ac/4+d$ voir note 2

si q=0 voir note 2

$z=0$, $\Delta_1=2(-p+(p^2-4r)^{1/2})$, $\Delta_2=2(-p-(p^2-4r)^{1/2})$ voir note 1

si q≠0 voir note 3

$p'=-p^2/12-r$, $q'=-p^3/108+pr/3-q^2/8$ voir note 4

$\Delta_3=(4p'^3+27q'^2)/27$
si $\Delta_3=0$
soit $p'=q'=0$ et on pose $y=p/6$
soit $p'\neq 0$ et on pose $y=p/6+3q'/p'$ voir note 5
si $\Delta_3\neq 0$
on pose $y=p/6+(-q'/2+(\Delta_3)^{1/2}/2)^{1/3}+(-q'/2-(\Delta_3)^{1/2}/2)^{1/3}$
le produit des deux racines 3ièmes ci-dessus, disons u et v, doit être $-p'/3$
en pratique il y a une seule extraction de racine 3ième à faire :
si $p'=0$, on prend $u=0$ et v est une racine 3ième de $-q'$
si $p'\neq 0$ on détermine une de ces racines 3ièmes, disons u,
et on prend $v=(-p'/3)/u$ voir note 6

il est parfois possible d'obtenir y sans racine 3ième voir note 7

$z=(2y-p)^{1/2}$, $\Delta_1=-2y-p+2q/z$, $\Delta_2=-2y-p-2q/z$ voir note 1 et note 8

note 1

toute expression de la forme $E^{1/k}$, avec k=2 ou 3, désigne une racine kième particulière de E ; elle peut être imaginaire.

note 2

en posant $x=u-a/4$, l'équation de départ se réduit à l'équation $u^4+pu^2+qu+r=0$, et donc lorsque $q=0$, l'équation de départ se réduit à une équation bicarrée.

note 3 ($q\neq 0$)

le y ci-dessous est une solution de l'équation de Ferrari associée à la réduite (voir note 2) $u^4+pu^2+qu+r=0$, équation de Ferrari qui a ses solutions toutes différentes de p/2 car $q\neq 0$.

note 4 ($q\neq 0$)

$p'=ac/4-b^2/12-d$, $q'=-a^2d/8+abc/24-b^3/108+bd/3-c^2/8$

note 5 ($q\neq 0$, $\Delta_3=0$)

on peut prendre aussi $y=p/6-3q'/(2p')$

note 6 ($q\neq 0$, $\Delta_3\neq 0$)

les deux $(\Delta_3)^{1/2}$ désignent évidemment la même racine 2ième de Δ_3 et **impérativement**, les deux racines 3ièmes, disons u et v, apparaissant dans l'expression définissant y doivent avoir un produit égal à -p'/3.

si p' et q' sont réels (c'est le cas si a,b,c,d le sont)

si $\Delta_3>0$ on prend comme racine 3ième u de $(-q'/2+(\Delta_3)^{1/2}/2)$ sa racine 3ième réelle et $v=(-p'/3)/u$ est la racine 3ième réelle de $(-q'/2-(\Delta_3)^{1/2}/2)$

si $\Delta_3<0$ on prend comme racine 3ième de $(-q'/2+(\Delta_3)^{1/2}/2)$ une quelconque de ses racines 3ièmes, et $v=(-p'/3)/u$ est la racine 3ième de $(-q'/2-(\Delta_3)^{1/2}/2)$ conjuguée de u

note7 ($q\neq 0$, $\Delta_3\neq 0$)

lorsque p' et q' sont des rationnels (c'est le cas lorsque a, b, c, d le sont), on peut commencer par chercher si l'équation $t^3+p't+q'=0$ posséde une solution rationnelle t_0 (cela nécessite un nombre fini d'essais : voir conseil pratique situé dans le commentaire sur les équations n°2 et n°3 du chapitre 5), et alors on peut prendre $y=p/6+t_0$.

note 8 ($q\neq 0$)

voir note 3 pour la justification du fait que z est non nul.

Quelques remarques préliminaires avant la preuve des formules

1) L'écriture par un logiciel des racines de $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, racines écrites uniquement en fonction de a, b, c, d et à l'aide de radicaux, nécessite plus de 100 lignes (totalement remplies), environ 700 monômes , soit 3 pages de petits caractères!
Passons sur l'aspect pratique de ces formules...

2) On peut donner des formules tout de même plus pratiques je pense, en collant à la méthode de Ferrari : c'est ce que j'ai fait ci-dessus. Bien sûr les "emboîtements" ne sont pas faits, mais ils n'apportent strictement rien : écrire , par exemple, $a=e_1^{1/2}$, $b=(a+(e_2+e_3)^2)^{1/2}$ puis $c=a+b$ me semble aussi clair qu'écrire $c=e_1^{1/2}+(e_1^{1/2}+(e_2+e_3)^2)^{1/2}$.
Malgré le peu de lignes nécessaires pour écrire les formules que j'ai données, il ne faut pas se cacher le problème pratique posé par la simplification de y ; mais en fait c'est le même problème posé par les formules de Cardan : simplification ou non de la somme des deux racines 3ièmes (voir note 7 ci-dessus).
Mais il peut y avoir aussi le problème pratique de la simplification des racines 2ièmes d'un nombre imaginaire, comme par exemple celles de 4-2i (voir exemple F6).

3) On verra à la question 8) du 2ième exercice-vérification ci-après, que **le logiciel Mathematica utilise les formules de Cardan-Ferrari-AP**.

4) Une vérification dans le cas particulier $x^4+4ix^3-6x^2-4ix+1=0$, dont le lecteur trouvera de tête les solutions!

$a=4i$, $b=-6$, $c=-4i$ $d=1$
$p=0$, $q=0$, $r=0$
$z=0$, $\Delta_1=\Delta_2=0$

et les quatre solutions sont
$-4i/4+(0\pm 0^{1/2})/2$ et $-4i/4+(0\pm 0^{1/2})/2$, soit -i solution quadruple.

Preuve des formules (suivie de deux exemples et de deux exercices)

En fait, c'est une formalisation de la méthode de Ferrari dans le cas général.
Soit **(E)** $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, l'équation à résoudre.
En posant $x=u-a/4$ on obtient **(E_r)** $u^4+pu^2+qu+r=0$ avec
$p=-3a^2/8+b$, $q=a^3/8-ab/2+c$, $r=-3a^4/256+ba^2/16-ac/4+d$.

Si q=0

cette équation (E_r) est bicarrée et donc $u^2=(-p\pm(p^2-4r)^{1/2})/2$, $(p^2-4r)^{1/2}$ désignant une racine 2ième de p^2-4r, racine 2ième qui peut être imaginaire.
En posant $\Delta_1=2(-p+(p^2-4r)^{1/2})$ et $\Delta_2=2(-p-(p^2-4r)^{1/2})$, les solutions de ($E_r$) sont $\pm\Delta_1^{1/2}/2$ et $\pm\Delta_2^{1/2}/2$, puisque $2^{1/2}/2=1/2^{1/2}$. En leur ajoutant $-a/4$ on obient les solutions de (E).

Si q≠0

on applique cette fois la méthode de Ferrari.
L'équation de Ferrari associée à (E_r) est
(F) $y^3-(p/2)y^2-ry+(4pr-q^2)/8=0\Leftrightarrow(y^2-r)(y-p/2)-q^2/8=0$.
On remarque tout de suite que cette équation a pour solution p/2 si et seulement si q=0, auquel cas elle s'écrit $(y-p/2)(y^2-r)=0$ et donc elle a pour solutions p/2 et $\pm r^{1/2}$.
Comme nous sommes dans le cas q≠0, **toutes les solutions de (F) sont différentes de p/2**.

En posant $y=t+p/6$, (F) devient **(F_r)** $t^3+p't+q'=0$ avec
$p'=-p^2/12-r=ac/4-b^2/12-d$ et $q'=-p^3/108+pr/3-q^2/8=-a^2d/8+abc/24-b^3/108+bd/3-c^2/8$.
Posons $\Delta_3=4p'^3/27+q'^2$: $-27\Delta_3$ est le discriminant de (F_r), (voir chapitre 3).
si Δ_3=0

soit p'=q'=0 et (F_r) a pour seule solution t=0 et donc (F) a une seule solution y=p/6
soit p'≠0 et alors (voir chapitre 3) les solutions de (F_r) sont t=3q'/p' (simple) et f=-3q'/(2p') (double), donc les solutions de (F) sont y=p/6+3q'/p' et y=p/6-3q'/(2p').

si Δ_3≠0 (voir chapitre 3)

les solutions de (F_r) sont $u+v$, $ju+j^2v$, j^2u+jv avec $u^3=X_1$, $v^3=X_2$ (les X_i étant les racines de $X^2+q'X-p'^3/27=0$) **avec uv=-p'/3**.
En pratique comment trouver u (racine 3ième de X_1) et v (racine 3ième de X_2) tels que uv=-p/3?

Dans le cas où p'=0, $\{X_1 ; X_2\}=\{ 0 ; -q'\}$: **on prend u=0 et v=une racine 3ième quelconque de -q'**.

Lorsque p'≠0 (donc X_1 et X_2 sont non nuls), **on prend pour u une racine 3ième quelconque de X_1 et v=(-p'/3)/u**

En effet, $X_1X_2=-(p'/3)^3=(uv)^3$, donc $X_1X_2=X_1v^3$, et comme X_1 est non nul on obtient $v^3=X_2$ et v est bien une racine 3ième de X_2.

Notons maintenant $X_1=-q'/2+(\Delta_3)^{1/2}/2$ et $X_2=-q'/2-(\Delta_3)^{1/2}/2$; si Δ_3 est un réel négatif ou un imaginaire, $(\Delta_3)^{1/2}$ (qui en est une racine 2ième) est imaginaire.
Dans le cas où p' (≠0) et q' sont réels on peut prendre

si $\Delta_3>0$ (voir 1er cas du chapitre 4)
u=la racine 3ième réelle de X_1 et v=(-p'/3)/u (qui est bien racine 3ième de X_2, cf ci-dessus) est donc réel : c'est la racine 3ième réelle de X_2 ;

si $\Delta_3<0$ (voir début de la preuve du 3ième cas du chapitre 4)
u=une racine 3ième quelconque de X_1 (elle est imaginaire) et v=(-p'/3)/u (qui est bien racine 3ième de X_2, cf ci-dessus) est en fait le conjugué de u.

En effet $u^3v^3=-(p'/3)^3$, donc $|u|^3|v|^3=-(p'/3)^3$, soit $|u||v|=-p'/3$ (un nombre réel a une seule racine 3ième réelle). Mais X_1 et X_2 sont conjugués, donc ont même module, donc $|u|^3=|v|^3$, soit $|u|=|v|$ et finalement, $v=|u||v|/u=|u|^2/u$ est bien le conjugué de u.

u et v étant déterminés, on fait un choix pour t : par exemple t=u+v, ce qui donne comme solution de (F) $y=p/6+u+v$ qui est différente de 0 (voir plus haut).
On peut alors poursuivre la méthode de Ferrari :
$(u^2+y)^2-(u^4+pu^2+qu+r)=(2y-p)u^2-qu+y^2-r=(2y-p)(u-q/(2(2y-p)))^2$, et donc en prenant pour z une racine 2ième particulière de 2y-p (qui est non nul), on obtient :
$u^4+pu^2+qu+r=(u^2+y-z(u-q/(2(2y-p))))(u^2+y+z(u-q/(2(2y-p))))$.
Et donc u est solution de (E_r)

$\Leftrightarrow u^2+zu+y-zq/(2(2y-p))=0$ ou $u^2-zu+y+zq/(2(2y-p))=0$
$\Leftrightarrow u^2+zu+y-q/(2z)=0$ ou $u^2-zu+y+q/(2z)=0$

En posant $\Delta_1=z^2-4(y-q/(2z))=-2y-p+2q/z$ et $\Delta_2=z^2-4(y+q/(2z))=-2y-p-2q/z$, les solutions de (E_r) s'écrivent $(-z\pm(\Delta_1)^{1/2})/2$ et $(z\pm(\Delta_2)^{1/2})/2$. En leur ajoutant -a/4 on obtient les solutions de (E).

<u>Remarque</u> :
Lorsque q=0 (l'équation (E) se réduit alors à une bicarrée) on pourrait aussi appliquer la méthode de Ferrari, sous réserve que l'équation de Ferrari (F) dont les solutions sont alors p/2, $r^{1/2}$ et $-r^{1/2}$, admette une solution différente de p/2.
Cela est possible sauf si on a simultanément $r^{1/2}=p/2$ et $-r^{1/2}=p/2$, ce qui entaîne p=0, donc r=0 et comme q=0, c'est que (E_r) est $u^4=0$, donc que (E) est $(x+a/4)^4=0$.
Réciproquement, si (E) s'écrit $(x+a/4)^4=0$, forcément p=q=r=0 (on peut aussi le vérifier à partir du fait qu'on a alors $b=3a^2/8$, $c=a^3/16$, $d=a^4/16$), et donc (F) s'écrit y=0 et n'a pas de solution différente de p/2=0.

Donc dans le cas q=0, et (E) ne s'écrivant pas $(x+a/4)^4=0\Leftrightarrow$ p et r pas tous les deux nuls, on pourrait utiliser la méthode de Ferrari, en prenant pour y une racine 2ième de r distincte de p/2.
Mais ce serait utiliser un chemin bien détourné pour résoudre une bicarrée.

En outre cela donnerait une écriture "inhabituelle" des solutions d'une bicarrée. En effet, en notant $r^{1/2}$ une racine 2ième de r distincte de p/2, on a $z=(2r^{1/2}-p)^{1/2}$ (une racine 2ième de $2r^{1/2}-p$) et $\Delta_1=\Delta_2=-2r^{1/2}-p$, et en notant $z'=(-2r^{1/2}-p)^{1/2}$ (une racine 2ième de $-2r^{1/2}-p$), et donc zz' est une racine 2ième de $(2r^{1/2}-p)(-2r^{1/2}-p)=p^2-4r$, la méthode de Ferrari donne comme solutions de (E)

$-a/4+(z+z')/2$, $-a/4+(z-z')/2$, $-a/4+(-z+z')/2$, $-a/4+(-z-z')/2$

alors que celles données par la résolution habituelle d'une bicarrée sont (voir le cas q=0 dans la preuve ci-dessous)

$-a/4+u_1$, $-a/4-u_1$, $-a/4+u_2$, $-a/4-u_2$, avec u_1= une racine 2ième de (-p+zz')/2 et u_2= une racine 2ième de (-p-zz')/2

On peut vérifier, directement, qu'il s'agit bien des mêmes solutions : cela revient à montrer que l'ensemble F constitué des nombres z+z', z-z', -z+z', -z-z' (la multiplicité d'apparition d'un de ces nombres étant prise en compte) et l'ensemble B constitué des nombres $2u_1$,$-2u_1$, $2u_2$,$-2u_2$ (la multiplicité d'apparition d'un de ces nombres étant prise en compte) sont les mêmes.
On notera que $2u_1$ et $-2u_1$ sont les racines 2ièmes de -2p+2zz', et que $2u_2$ et $-2u_2$ sont les deux racines 2ièmes de -2p-2zz'.
si $r^{1/2}=-p/2$ (donc $p\neq0$, car on est dans le cas q=0 et p et r pas tous les deux nuls)

on a z'=0 et $z^2=-2p$ (puisque z racine 2ième de $2r^{1/2}-p=-2p$)
donc F contient z qui apparaît deux fois et -z qui apparaît deux fois,
et B contient les racines 2ièmes de -2p, qui apparaissent deux fois chacune :
comme $z^2=(-z)^2=-2p$, c'est que F=B.

si $r^{1/2}\neq-p/2$

soit r=0, donc $p\neq0$ (puisque l'on est dans le cas q=0 et p et r pas tous les deux nuls)
on peut choisir z=z' (cela ne change pas F et B)
alors F contient 2z et -2z, cad les racines 2ièmes de -4p (puisque $z^2=-p$) et 0 qui apparaît deux fois ;
et B contient les racines 2ièmes de $-2p-2z^2=0$ (donc 0 apparaît deux fois) et les racines 2ièmes de $-2p+2z^2=-4p$, et donc F=B

soir $r\neq0$
alors z+z', z-z', -z+z', -z-z' sont distincts 2 à 2 : si z+z'=z-z' alors z'=0, exclu car $p\neq-2r^{1/2}$, si z+z'=-z+z' alors z=0, exclu car $p\neq2r^{1/2}$ (car $r^{1/2}$ est une racine 2ième de r distincte de p/2), si z+z'=-z-z', alors z+z'=0,

donc $z^2=z'^2$, $2r^{1/2}-p=-2r^{1/2}-p$, r=0, exclu ; etc.
Or $(z+z')^2=(-z-z')^2=z^2+z'^2+2zz'=-2p+2zz'$ et $(z-z')^2=(-z+z')^2=z^2+z'^2-2zz'=-2p-2zz'$, donc les quatre éléments de F sont les deux racines 2ièmes de -2p+zz' et les deux racines 2ièmes de -2p-zz', soient les éléments de B : donc F=B.

Exemple 1 : $x^4-7x^2-24x-15=0$ (c'est l'exemple F1).

a=0, b=-7, c=-24, d=-15
p=-7, q=-24, r=-15
p'=131/12, q'=-3653/108
$\Delta_3=48125/36$, $(\Delta_3)^{1/2}=25\times\sqrt{}77/6$.
A ce niveau deux possibilités :

soit on utilise la note 7 :
l'équation $t^3+p't+q'=0 \Leftrightarrow 108t^3+1179t-3653=0$ a-t'elle une solution rationnelle?
m/n (m et n étant deux entiers premiers entre eux) en sera solution si m divise 3653=13×281 et si n divise $108=2^3\times3^3$. Ce qui donne un nombre fini de possibilités dont une (coup de chance!), 13/6, est effectivement solution : on peut donc prendre y=p/6+13/6=1.

si on n'utilise pas cette idée c'est qu'on prend $y=-7/6+(3653/216+25\times\sqrt{}77/12)^{1/3}+(3653/216-25\times\sqrt{}77/12)^{1/3}$, les puissances 1/3 désignant les racines 3ièmes réelles (voir note 6).
En fait cet y est effectivement égal à 1 :
en effet, cet y est une solution (réelle ici) de l'équation de Ferrari, laquelle en posant y=p/6+t=-7/6+t (voir preuve ci-dessus) se réduit à $t^3+p't+q'=0$; mais $4p'^3+27q'^2>0$, donc (voir chapitre 4) cette équation a **une seule solution réelle** 13/6 et comme cet y est réel, c'est que y+7/6=13/6 et on a bien y=1.

<u>Remarque</u> :
si on essaye de simplifier $t=(b'+c'^{1/2})^{1/3}+(b'-c'^{1/2})^{1/3}$ avec b'=-q'/2 et $c'=\Delta_3/4$, lorsque q' et r' sont rationnels et cela en appliquant la méthode définie à l'exemple 8 de la 1ière série d'exemples du chapitre 5, on obtient :
$c'-b^2=p'^3/27$, qui est donc le cube du rationnel p'/3 et t sera rationnel si et seulement si l'équation $t^3+3\times p'/3t-2b'=0 \Leftrightarrow t^3+p't+q'=0$ admet une solution rationnelle.

Toujours est-il qu'ici on a y=1, donc $z=(2y-p)^{1/2}=(2+7)^{1/2}=3$ et ainsi $\Delta_1=-2+7+(-48)/3=-11$ et $\Delta_2=-2+7-(-48)/3=21$, et donc les quatre solutions de l'équation de départ sont

$$(-3\pm i\sqrt{}11)/2 \text{ et } (-3\pm\sqrt{}21)/2.$$

Mais si y n'avait pu être simplifié, il aurait fallu garder, pour y, la somme des deux racines 3ièmes , et on n'aurait pas pu aller plus loin dans les calculs,....sauf écrire les emboîtements, ce qui peut être un peu "longuet".

Montrons tout de même ce que donnent les emboîtements, pour une racine :
$(-(2(-7/6+(3653/216+25\times\sqrt{}77/12)^{1/3}+(3653/216-25\times\sqrt{}77/12)^{1/3})+7)^{1/2} +(-2(-7/6+(3653/216+25\times\sqrt{}77/12)^{1/3}+(3653/216-25\times\sqrt{}77/12)^{1/3})+7-48/(2(-7/6+(3653/216+25\times\sqrt{}77/12)^{1/3}+(3653/216-25\times\sqrt{}77/12)^{1/3})+7)^{1/2})^{1/2})/2$

Donc pour écrire explicitement, avec tous les radicaux, les quatre racines de cette équation, huit lignes vont suffire.

Exemple 2 : $x^4+x^3+x^2+x+1=0$

a=b=c=d=1
p=5/8, q=5/8, r=205/256 : donc $q\neq0$
p'=5/6, q'=25/216 $\Delta_3=-125/1728\neq0$.

Avant de se lancer dans des racines 3ièmes on regarde (voir note 7) si
$t^3+p't+q'=0$, soit $216t^3-180t+25=0$ a une solution rationnelle : oui, t=5/6.
On peut donc prendre y=p/6+5/6=45/48 et $z=(2y-p)^{1/2}=(5/4)^{1/2}=\sqrt{}5/2$.
$\Delta_1=-45/24-5/8+(5/4)/(\sqrt{}5/2)=(-20+4\sqrt{}5)/8$ et $\Delta_2=(-20-4\sqrt{}5)/2$, et les quatre solutions de l'équation sont

$$(-1-\sqrt{}5\pm\sqrt{}(10-2\sqrt{}5))/4 \text{ et } (-1+\sqrt{}5\pm\sqrt{}(10+2\sqrt{}5))/4$$

.
Bien entendu, ces quatre solutions sont les quatres racines 5ièmes de 1 autres que 1, puisque $x^4+x^3+x^2+x+1=(x^5-1)/(x-1)$ pour $x\neq 1$. Cet aspect permet de trouver tout de suite leur forme trigonométrique.

1er exercice-vérification

Enoncé :
Vérifier, en utilisant uniquement les formules (et les notes associées) des solutions d'une équation du 4ième degré données dans l'encadré situé au début de ce paragraphe, que si a=d=0, l'équation $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ a effectivement une solution nulle.

solution :
Puisque a=0, il s'agit de montrer que $(z^2-\Delta_1)(z^2-\Delta_2)=0$.
On a p=b, q=c, r=0, $p'=-b^2/12$, $q'=-b^3/108-c^2/8$.

si c=0

alors on est dans le cas q=0, donc z=0 et $(z^2-\Delta_1)(z^2-\Delta_2)= \Delta_1\Delta_2=4(p^2-(p^2-4r))=16r=0$.

si c≠0

on est donc dans le cas $q\neq 0$, et il s'agit alors de montrer que $(2y-b-(-2y-b+2c/z))(2y-b-(-2y-b-2c/z))=0$, soit que $(4y-2c/z)(4y+2c/z)=0$, soit que $16y^2(2y-b)=4c^2$, soit que $y^3-y^2b/2-c^2/8=0$, soit que
$(y-b/6)^3-b^2y/12+b^3/216-c^2/8=0$.
Mais $y-p/6=y-b/6=u^{1/3}+v^{1/3}$, avec $u=-q'/2+(\Delta_3)^{1/2}/2$, $v=-q'/2-(\Delta_3)^{1/2}/2$ et $u^{1/3}v^{1/3}=-p'/3=b^2/36$.
Donc $(y-b/6)^3=u+v+3(-p'/3)(u^{1/3}+v^{1/3})$, et comme $p'=-b^2/12$, on a
$(y-b/6)^3-b^2y/12+b^3/216-c^2/8=u+v+b^2(u^{1/3}+v^{1/3})/12 -(b^2/12)(b/6+u^{1/3}+v^{1/3})+b^3/216-c^2/8$
$=u+v-b^3/72+b^3/216 -c^2/8=-q'-b^3/108-c^2/8=0$.

2ième exercice-vérification

Enoncé : On considère la parabole *P* d'équation $y=x^2$ et $U(u,u^2)$ un point de *P*.
Une longueur $\lambda\geq 0$ étant donnée, on cherche les points M de *P* tels que $UM=\lambda$, ce qui conduit à chercher x tel que $(x-u)^2+(x^2-u^2)^2=\lambda^2$.
On obtient donc l'équation du 4ième degré suivante :

$$\mathbf{x^4+(1-2u^2)x^2-2ux+u^4+u^2-\lambda^2=0 \quad (E)}$$

1) Si u est suffisamment grand pour qu'au voisinage de U la parabole *P* puisse être assimilée à sa tangente en U, et si λ est petit devant u, déterminer des valeurs approchées des solutions réelles de (E).

Dans tout ce qui suit on utilise les notations de l'encadré du début de ce paragraphe (formules de Cardan-Ferrari-AP).

2) Exprimer p' et q' en fonction de u et λ.

3) Exprimer Δ_3 en fonction de u et λ ; on vérifiera que Δ_3 est de degré 6 en u.

4) En se placant dans le cas où $u^4+u^2-\lambda^2=0$, déterminer le signe de Δ_3 en fonction de u.

5) A partir des formules données de Cardan-Ferrari-AP déterminer les solutions exactes de (E) dans le cas $\lambda=0$, et bien sûr vérifier...

6) A partir des formules données de Cardan-Ferrari-AP déterminer les solutions exactes de (E) dans le cas u=0, et bien sûr vérifier...

7) A partir des formules données de Cardan-Ferrari-AP, et à l'aide d'une machine à calculer (pouvant extraire des racines 2ièmes et 3ièmes) donner des valeurs approchées des quatre solutions de (E) dans les deux cas suivants :

- 7.1) u=1 ; $\lambda=2^{1/2}$ (il s'agit d'un cas particulier de $u^4+u^2-\lambda^2=0$: le cas a=0, d=0 a été traité à l'exercice précédent).
- 7.2) u=10 ; $\lambda=1$; pour ce cas on comparera avec les valeurs approchées obtenues à la question 1).

Remarque : bien entendu, u et λ ayant une valeur numérique donnée, une dichotomie (par exemple) permet de trouver rapidement des valeurs approchées des solutions réelles de (E), mais le but de l'exercice est essentiellement de fournir une vérification supplémentaire des formules avec radicaux.

8) Voici le résultat donné par le logiciel Mathematica où x désigne les solutions de (E) :

- $r=\lambda$*Sqrt[$1+8\lambda^2+16\lambda^4+12u^2-80\lambda^2*u^2+48u^4-16\lambda^2*u^4+64u^6$]
- $s=(1+36\lambda^2+12u^2-72\lambda^2*u^2+48u^4+64u^6+6$Sqrt[3]r$)^{1/3}$
- x=(t'/2)Sqrt[$-1+2u^2+(1/3)(1-2u^2)+(1-12\lambda^2+8u^2+16u^4)/(3s)+s/3$]+
  t((1/2)Sqrt[$-1+2u^2+(1/3)(-1+2u^2)-(1-12\lambda^2+8u^2+16u^4)/(3s)-s/3+$
  (4ut')/Sqrt[$-1+2u^2+(1/3)(1-2u^2)+(1-12\lambda^2+8u^2+16u^4)/(3s)+s/3$]])
  (avec t valant +1 ou -1, t' valant +1 ou -1)

A vrai dire le résultat ci-dessus n'est pas celui donné tel quel par Mathematica, car, notamment, Mathematica donne x sans l'utilisation des variables intermédiaires r et s ; comme l'expression s intervient six fois dans x, en introduisant r et s, on raccourci considérablement l'expression donnant x et ... on y voit plus clair.

Je laisse le lecteur vérifier successivement que :

- $r=(4\times27\times\Delta_3)^{1/2}$
- $s=6(-q'/2+(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3}$
- l'expression dans le 1er sqrt apparaissant dans l'expression donnant x est :
  $-2p/3+(-4p')/(6(-q'/2+(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3})+2(-q'/2+(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3}=2y-p$, et donc ce 1er sqrt est $(2y-p)^{1/2}$
- l'expression situé au début (cad avant le +(4ut')) du 2ième sqrt apparaissant dans l'expression donnant x est $-2y-p$
- puisque $z=(2y-p)^{1/2}$ et $q=-2u$, **on a donc $x=t'z/2+t(-2y-p-2qt'/z)^{1/2}/2$**, ce qui donne
  pour t'=1,t=1 : $x=z/2+(-2y-p-2q/z)^{1/2}/2=(z+\Delta_2^{1/2})/2$
  pour t'=1, t=-1 : $x=z/2-(-2y-p-2q/z)^{1/2}/2=(z-\Delta_2^{1/2})/2$
  pour t'=-1,t=1 : $x=-z/2+(-2y-p+2q/z)^{1/2}/2=(-z+\Delta_1^{1/2})/2$
  pour t'=-1, t=-1 : $x=-z/2-(-2y-p+2q/z)^{1/2}/2=(-z-\Delta_1^{1/2})/2$

Ceci prouve que les formules de Cardan-Ferrari-AP sont utilisées en pratique!

Solution :

1) La tangente en U à *P* a pour équation $y=2u(x-u)+u^2$ et l'équation à résoudre devient $(x-u)^2+(2u(x-u)+u^2-u^2)^2=\lambda^2$, soit $(1+4u^2)(x-u)^2=\lambda^2$, équation du 2ième degré dont les deux solutions sont

$u+\lambda/(1+4u^2)^{1/2}$ et $u-\lambda/(1+4u^2)^{1/2}$

Ce sont des valeurs approchées de solutions réelles de (E).

2) On a

$a=0$; $b=1-2u^2$; $c=-2u$; $d=u^4+u^2-\lambda^2$
$p=b$, $q=c$, $r=d$

D'où

- **p'**$=-b^2/12-d=-4u^4/3-2u^2/3+\lambda^2-1/12=$ $\mathbf{-(2u^2+1/2)^2/3+\lambda^2}$
- $q'=-b^3/108+bd/3-c^2/8=-16u^6/27-4u^4/9+(2\lambda^2/3-1/9)u^2-\lambda^2/3-1/108$
  $\mathbf{q'=-2(2u^2+1/2)^3/27+\lambda^2(2u^2-1)/3}$

3) Vus les degrés en u de p' et q', on se dit que $\Delta_3=(4p'^3+27q'^2)/27$ va être de degré 12 en u : il n'en est rien, car les termes en $(2u^2+1/2)^6$ s'éliminent et ainsi Δ_3 va être de degré 6 :
$4p'^3=-4(2u^2+1/2)^6/27+4\lambda^2(2u^2+1/2)^4/3-4\lambda^4(2u^2+1/2)^2+4\lambda^6$
$27q'^2=4(2u^2+1/2)^6/27-4\lambda^2(2u^2+1/2)^3(2u^2-1)/3+3\lambda^4(2u^2-1)^2$
$27\Delta_3=(4/3)\lambda^2(2u^2+1/2)^3(2u^2+1/2-(2u^2-1))+\lambda^4(-4(2u^2+1/2)^2+3(2u^2-1)^2)+4\lambda^6$
$27\Delta_3=2\lambda^2(8u^6+6u^4+3u^2/2+1/8)+\lambda^4(-4u^4-20u^2+2)+4\lambda^6$
ce qui donne

$$\mathbf{27\Delta_3= \lambda^2(16u^6+(-4\lambda^2+12)u^4+(-20\lambda^2+3)u^2 +(2\lambda^2+1/2)^2)}$$

4) En remplacant λ^2 par u^4+u^2, le résultat précédent donne :
$27\Delta_3=(u^4+u^2)(-2u^4+5u^2+1/4)$.
Les racines du trinôme $-2X^2+5X+1/4$ étant $(5+3\times3^{1/2})/4>0$ et $(5-3\times3^{1/2})/4<0$, ce trinôme est négatif pour X à l'extérieur de ses racines, donc **dans le cas $u^4+u^2=\lambda^2$, $\Delta_3<0\Leftrightarrow|u|>((5+3\times3^{1/2})^{1/2})/2\cong1{,}596$.**

5) $q=c=-2u$

- si $u=0$, alors $q=0$
  et $p=b=1$, $r=d=0$
  $z=0$, $\Delta_1=0$, $\Delta_2=-4$ et on obtient (avec $\Delta_2^{1/2}=2i$) **0, 0, -i, i comme solutions** ;
  On vérifie : dans ce cas (E) s'écrit $x^4+x^2=0$ (elle est bicarrée), soit $x^2(x^2+1)=0$, dont les solutions (exactes) sont bien celles trouvées ci-dessus.
- si $u\neq0$, alors $q\neq0$
  $\Delta_3=0$
  $p'= -(2u^2+1/2)^2/3$
  $q'= -2(2u^2+1/2)^3/27$
  Comme p' et q' ne sont pas nuls (u est réel), on peut prendre $y=p/6+3q'/p'=(1-2u^2)/6+(2/3)(2u^2+1/2)=u^2+1/2$
  $z=(2y-p)^{1/2}=(2u^2+1-(1-2u^2))^{1/2}=(4u^2)^{1/2}=2u$ (voir note 1)
  $\Delta_1=-2y-p+2q/z=-2u^2-1-1+2u^2-4u/(2u)=-4$
  $\Delta_2=-2y-p-2q/z=-2u^2-1-1+2u^2+4u/(2u)=0$
  Et en prenant $\Delta_1^{1/2}=2i$, les solutions de (E) sont $(-2u-2i)/2$, $(-2u+2i)/2$, $2u/2$, $2u/2$, soit **-u-i, -u+i, u, u**
  On vérifie : dans ce cas (E) s'écrit $x^4+(1-2u^2)x^2-2ux+u^4+u^2=0$, soit $(x^2-u^2)^2+(x-u)^2=0\Leftrightarrow(x-u)^2((x+u)^2+1)=0$, dont les solutions (exactes) sont bien celles trouvées ci-dessus.

6) $q=c=-2u=0$
$p=b=1$, $r=d=-\lambda^2$
$z=0$, $\Delta_1=2(-1+(1+4\lambda^2)^{1/2})>0$, $\Delta_2=2(-1-(1+4\lambda^2)^{1/2})<0$
Les solutions de (E) sont donc $\pm(\Delta_1^{1/2})/2$ et $\pm(\Delta_2^{1/2})/2$
soit, $\mathbf{\pm((-1+(1+4\lambda^2)^{1/2})/2)^{1/2}}$ **et** $\mathbf{\pm i((1+(1+4\lambda^2)^{1/2})/2)^{1/2}}$, cf $2^{1/2}/2=1/2^{1/2}$.
On vérifie : dans ce cas (E) s'écrit $x^4+x^2-\lambda^2=0$ (elle est bicarrée), soit $(x^2+1/2)^2=(1+4\lambda^2)/4$, dont les solutions (exactes) sont bien celles trouvées ci-dessus.

7.1) Par "automatisme", toutes les valeurs approchées données sont obtenues en conservant uniquement les six premiers chiffres du développement décimal donné par "ma" calculatrice.
$q=c=-2u=-2\neq0$
$p'=-(2+1/2)^2/3+2=-1/12$
$q'=-2(2+1/2)^3/27+2(2-1)/3=-53/108$
$27\Delta_3=2(16+(-8+12)+(-40+3)+16+4+1/4)=2(3+1/4)=13/2$
$(-q'/2+(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3}\cong0{,}788747$ et $(-q'/2-(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3}\cong0{,}035217$
$p=b=1-2u^2=-1$
$y=p/6+(-q'/2+(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3}+ (-q'/2-(\Delta_3^{1/2})/2)^{1/3}\cong0{,}657298$
<u>Remarque</u> :

> y+1/6 est solution de $t^3+p't+q'=0$, soit $108t^3-9t-53=0$, équation qui n'a pas de solution rationnelle :
> en effet si p/q (p et q entiers relatifs premiers entre eux) était solution on aurait p divise 53 et q divise $108=2^2\times3^2$, et aucune des possiblités correspondantes ($\pm53^{0\text{ ou }1}/(2^{0\text{ ou }1\text{ ou }2}\times 3^{0\text{ ou }1\text{ ou }2}$) n'est solution (en fait on peut se limiter à un numérateur de -1 ou 1, car cf $108t^3-9t-53=t(108t^2-9)-53$, si $|t|\geq1$, t n'est pas solution).

$z=(2y-p)^{1/2}\cong1{,}521379$
$2q=2c=-4u=-4$
$\Delta_1=-2y-p+2q/z=-2y+1-4/z\cong-2{,}943788$, donc $\Delta_1^{1/2}\cong1{,}715747i$
$\Delta_2=-2y-p-2q/z=-2y+1+4/z\cong2{,}314596$, donc $\Delta_2^{1/2}\cong1{,}521379$
et les quatres solutions de (E) ont pour valeurs approchées $(-1{,}521379\pm1{,}751747i)/2$ et $(1{,}521379\pm1{,}521379)/2$, soit
-0,760689±0,857873i ; 1,521379 ; 0,000000

Remarque 1 : l'équation (E) s'écrit dans ce cas $x^4-x^2-2x=0$, donc x=0 est solution (exacte) ; l'autre solution réelle n'est pas rationnelle, car p/q (p et q premiers entre eux) solution de $x^3-x-2=0$ exige p divise 2, q divise 1, donc p/q est -1 ou 1 ou -2 ou 2, valeurs qui ne sont pas solution de (E).

Remarque 2 : la TI92 (par exemple, via csolve(x^3-x-2=0,x)) donne comme valeurs approchées des solutions de (E) : -0,760689±0,857873i ; 1,521379 ; 0.

7.2) Comme à P7.1, toutes les valeurs approchées données sont obtenues en conservant uniquement les six premiers chiffres du développement décimal donné par "ma" calculatrice.
$q=c=-2u=-20\neq 0$
$p'=-(200+1/2)^2/3+1\cong-13399{,}083333$
$q'=-2(200+1/2)^3/27+(200-1)/3\cong-596981{,}824074$
$27\Delta_3=16\times10^6+8\times10^4-17\times10^2+4+2+1/4=16078306{,}25$
$(-q'/2+(\Delta_3{}^{1/2})/2)^{1/3}\cong66{,}859641$ et $(-q'/2-(\Delta_3{}^{1/2})/2)^{1/3}\cong66{,}802049$
$p=b=1-2u^2=-199$
$y=p/6+(-q'/2+(\Delta_3{}^{1/2})/2)^{1/3}+ (-q'/2-(\Delta_3{}^{1/2})/2)^{1/3}\cong100{,}495024$
$z=(2y-p)^{1/2}\cong19{,}999751$
$2q=2c=-4u=-40$
$\Delta_1=-2y-p+2q/z=-2y+199-40/z\cong-3{,}990074$, donc $\Delta_1{}^{1/2}\cong1{,}997517i$
$\Delta_2=-2y-p-2q/z=-2y+199+40/z\cong0{,}009975$, donc $\Delta_2{}^{1/2}\cong0{,}099876$
et les quatres solutions de (E) ont pour valeurs approchées (-19,999751±1,997517i)/2 et (19,999751±0,099876)/2, soit
-9,999875±0,998758i ; 10,049813 ; 9,949937

Remarque 1 : ici on peut considérer que u=10 est suffisamment grand grand pour qu'au voisinage de U la parabole *P* puisse être assimilée à sa tangente en U, et λ=1 est petit devant 10, donc, cf Q1, on peut prendre comme valeurs approchées des solutions réelles de (E) $u\pm\lambda/(1+4u^2)^{1/2}= 10\pm1/401^{1/2}$, soit approximativement, 10,049813 et 9,949937.

Remarque 2 : la TI92 (par exemple) donne comme valeurs approchées des solutions de (E) : -9,999875±0,998758i ; 10,049813 ; 9,949937.

8) Discriminant d'un polynôme de degré 4

(suivi d'une étude d'une famille de polynômes de degré 4 à 3 paramètres)

1) Le discriminant du polynôme $P(X)=X^4+pX^2+qX+r$ (p,q,r dans C) est le discriminant de son polynôme résolvant $R(X)=X^3+2pX^2+(p^2-4r)X-q^2$, polynôme qui apparaît lors de la méthode de Descartes pour résoudre une équation du 2ième degré :

$$D(P)=D(R)=4(p^2/3+4r)^3-27(2p^3/27-8pr/3+q^2)^2$$

Quelques remarques sur ce discriminant :

Remarque 1 :
le fait que ce discrimant soit une fonction paire de q était attendu, car si on change q en -q, les racines de P sont changées en leurs opposées, donc les carrés des différences deux à deux de ces racines sont inchangés, donc le discriminant aussi.

Remarque 2 :

- si p=0, $D(P)=D(R)=256r^3-27q^4$
- si q=0, $D(P)=D(R)=16r(p^2-4r)^2$
- si r=0, $D(P)=D(R)=q^2(-4p^3-27q^2)$

Remarque 3 :
On peut démontrer que le discriminant de X^n+qX+r est $(-1)^{n(n-1)/2}((-1)^{n-1}(n-1)^{n-1}q^n+n^nr^{n-1})$; Escofier p33.
Ce qui donne

- pour n=2, q^2-4r
- pour n=3, -4q^3-27r^2
- pour n=4, 256r^3-27q^4

2) Si u et v sont les racines (dans C) de R' (polynôme dérivé de R), **alors D(P)=-27R(u)R(v)**.

3) On suppose maintenant p, q, r réels

3.1) si D(P)>0 alors p^2+12r>0 et
- **soit p<0 et p^2>4r et alors les quatre racines de P sont réelles distinctes (voir exemple F7)**
- **soit p≥0 ou p^2≤4r et alors les quatre racines de P sont imaginaires (non réelles) conjuguées deux à deux.**

3.2) si D(P)<0 alors P a deux racines réelles (distinctes) et deux racines imaginaires (non réelles) conjuguées

3.3) si D(P)=0

soit q≠0 et alors :
- soit p^2+12r=0 (donc p<0, r<0, p^2-4r>0)
  et P a deux racines réelles distinctes -(e/2)√(-2p/3) qui est triple, et (3e/2)√(-2p/3) avec e=-1 si q>0, e=1 si q<0
- soit p^2+12r>0 et
  - soit p<0 et p^2>4r et alors P a trois racines réelles distinctes dont une double (voir exemple F3)
  - soit p≥0 ou p^2≤4r et alors P a une racine réelle double et deux racines imaginaires (non réelles) conjuguées

soit q=0 et P est bicarré, r(p^2-4r)=0, et alors
- soit r=0
  - si p=0 alors P a une seule racine qui est 0 quadruple
  - si p<0 alors P a trois racines 0 (double) et ±√(-p)
  - si p>0 alors P a trois racines 0 (double) et ±i√p
- soit r≠0 et p^2-4r=0
  - si p<0, alors P a deux solutions réelles ±√(-p/2), double chacune
  - si p>0, alors P a deux racines imaginaires±i√(p/2)

3.4)

P n'a que des racines réelles	<=>	D(P)>0 et p<0 et p^2>4r ou D(P)=0 et q≠0 et p^2+12r=0 ou D(P)=0 et q≠0 et p^2+12r>0 et p<0 et p^2>4r ou D(P)=0 et q=0 et p≤0

On peut donc dire, si q≠0 (cad P n'est pas bicarré) :
P n'a que des racines réelles <=> D(P)≥0 et p<0 et p^2>4r

4) Tout polynôme Q(X)=X^4+aX^3+bX^2+cX+d (avec a, b, c, d dans C), de racines (dans C) r_i, se raméne par translation au polynôme P(X)=X^4+pX^2+qX+r avec

- **p=-3a^2/8+b**
- **q=a^3/8-ab/2+c**
- **r=-3a^4/256+a^2b/16-ac/4+d**

Les racines de P sont alors $x_i=r_i+a/4$, donc Q et P ont le même discriminant, et si a, b, c, d sont réels, p, q , r le sont aussi et la nature (réelle ou pas) de chaque racine r_i de Q est la même que la racine correspondante $x_i=r_i+a/4$ de P, et donc **pour discuter de la nature des racines de Q, il suffit d'appliquer le 3) ci-dessus.**
Bien entendu, si au "départ", Q n'est pas unitaire, on le rend unitaire en divisant tous ses coefficients par son coefficient de tête, ce qui ne change pas ses racines.

Remarque :
cette réduction d'un polynôme de degré 4 à un polynôme de degré 4 sans terme de degré 3 a été utilisée au paragraphe 7.

preuve 1) et 2) :

On a vu (voir Chapitre 3 sur discriminant), que le discriminant d'un polynôme de degré n, de coefficient de tête a, de racines x_i dans C est,
$D(P)=a^{2n-2}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$, soit ici
$D(P)=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_1-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2$.
Or si les trois racines de R sont $A_i=a_i^2$ avec $\prod a_i=q$, les quatre racines de P sont
$x_1=(-a_1+a_2+a_3)/2$, $x_2=(-a_1-a_2-a_3)/2$, $x_3=(a_1+a_2-a_3)/2$, $x_4=(a_1-a_2+a_3)/2$ (voir le chapitre 3) sur la méthode de Descartes plus haut), et on constate alors que
$x_1-x_2=a_2+a_3$, $x_1-x_3=-a_1+a_3$, $x_1-x_4=-a_1+a_2$, $x_2-x_3=-a_1-a_2$, $x_2-x_4=-a_1-a_3$, $x_3-x_4=a_2-a_3$
D'où $D(P)=\prod_{1\leq i<j\leq 4}(x_i-x_j)^2=(A_1-A_2)^2(A_1-A_3)^2(A_2-A_3)^2=D(R)$.
Il reste à préciser D(R) : pour cela, par translation on va ramener R à un polynôme canonique de degré 3 :
$R(X-2p/3)=T(X)=X^3+p'X+q'$ avec $p'=-p^2/3-4r$, $q'=-2p^3/3+8pr/3-q^2$(ce qui ne changera donc pas son discriminant, les différences deux à deux des racines ne changeant pas).
D(P)$=D(R)=D(T)=-4p'^3-27q'^2=$**$4(p^2/3+4r)^3-27(2p^3/27-8pr/3+q^2)^2$**.

En développant, on obtient $16p^4r-4p^3q^2-128p^2r^2+144prq^2-27q^4+256r^3$.
Note : le calcul de ce discriminant peut se faire aussi par le déterminant 7×7 de Sylvester (Ga/13/3/0/4).

Remarquons que le fait d'obtenir $D(P)=-q^2(4p^3+27q^2)$ lorsque r=0 était attendu, car dans ce cas
$P(X)=X(X^3+pX+q)$ qui a pour racines $x_1=0$ et celles de X^3+pX+q, notées x_2, x_3, x_4 et
$D(P)=(0-x_2)^2(0-x_3)^2(0-x_4)^2(x_2-x_3)^2(x_2-x_4)^2(x_3-x_4)^2=(x_2\ x_3x_4)^2(-4p^3-27q^2)=q^2(-4p^3-27q^2)$.

De même le fait que lorsque q=0, $D(P)=16p^4r-128p^2r^2+256r^3=16r(p^2-4r)^2$ n'est pas une surprise.
En effet, dans ce cas $P(X)=X^4+pX^2+r$ est bicarré, donc ses racines sont opposées 2 à 2. Par exemple $x_2=-x_1$ et $x_4=-x_3$, et alors $D(P)=(2x_1)^2(x_1-x_3)^2(x_1+x_3)^2(x_1+x_3)^2(x_1-x_3)^2(2x_3)^2=16(x_1x_3)^2(x_1^2-x_3^2)^4$.
Mais x_1^2 et x_3^2 sont les racines de X^2+pX+r, donc $x_1^2x_3^2=r$ et $(x_1^2-x_3^2)^2=(x_1^2+x_3^2)^2-4x_1^2x_3^2=p^2-4r$, soit
$D(P)=16r(p^2-4r)^2$.

Cf le lien ci-desssus, $D(R)=(-1)^{3(3-1)/2}Res(R,R')=-1^2 3^3(A_1-u)(A_1-v)(A_2-u)(A_2-v)(A_3-u)(A_3-v)$.
Mais $R(X)=(X-A_1)(X-A_2)(X-A_3)$ et ainsi **$D(R)=-27R(u)R(v)$**.

Voici une preuve directe de cette relation, sans passer par la notion de résultant.

> Puisque R'(u)=0, $u^2=-(4pu+p^2-4r)/3$, donc
> $R(u)=(-u/3)(4pu+p^2-4r)-(2p/3)(4pu+p^2-4r)+(p^2-4r)u-q^2$
> $R(u)=(4p/9)(4pu+p^2-4r)-(u/3)(p^2-4r)-(2p/3)(4pu+p^2-4r)+(p^2-4r)u-q$
> soit $R(u)=Au+B$ avec $A=(-2/9)(p^2+12r)$, $B=-2p^3/9+8pr/9-q^2$. De même, $R(v)=Av+B$.
> Ainsi $R(u)R(v)=A^2uv+AB(u+v)+B^2=A^2(p^2-4r)/3+AB\times(-4p/3)+B^2$, et en posant $C=(-2p/9)(p^2-4r)$, soit $B=C-q^2$,
> $R(u)R(v)=A^2(p^2-4r)/3-(4/3)pAC+C^2+q^2(4pA/3-2C+q^2)$
> $R(u)R(v)=-(16/27)r(p^2-4r)^2+(q^2/27)(4p^3-144pr+27q^2)$, et en développant, on trouve, à-1/27 près, le développement ci-dessus de P.

preuve 3) :

Cf l'écriture de D(P), $p^2/3+4r<0 \Rightarrow D(P)<0$ et $p^2/3+4r\leq 0 \Rightarrow D(P)\leq 0$, donc **$D(P)>0 \Rightarrow p^2+12r>0$**.

Comme D(P)=D(R) et que R est du 3ième degré, en utilisant les résultats du (Chapitre 3 sur discriminant)

- si $D(P)>0$ alors R a trois racines réelles distinctes
- si $D(P)<0$ alors R a une seule solution réelle et deux solutions imaginaires conjuguées
- si $D(P)=0$ alors soit R a uniquement deux solutions, qui sont réelles, et dont une est double, soit R a une seule solution, qui est réelle et triple

preuve 3.1) : cas $D(P)>0$

cas $D(P)>0$ et $q\neq 0$.
Soient A_1, A_2, A_3 les trois racines réelles de R : leur produit étant q^2, elles sont non nulles.
Donc, une au moins de ces racines est >0 :

si les deux autres sont aussi >0, alors $\sum A_i=-2p>0$ et $\sum A_iA_j=p^2-4r>0$

réciproquement, si $-2p>0$ et $p^2-4r>0$,

$R'(x)=3x^2+4px+p^2-4r$ a pour discriminant $4(p^2+12r)>0$ et donc a deux racines réelles u et v positives, avec $u<v$.
Un tableau de variation montre que R a d'abord un maximum en u puis un minimum en v : comme $R(u)R(v)=-D(P)/27<0$, c'est que $R(u)>0$ et $R(v)<0$: donc R a une racine entre u et v et une autre supérieure à v, et ainsi R a deux racines postives, donc ses trois racines sont positives.

Donc, $p<0$ et $p^2-4r>0$ <=> les trois racines A_i de R sont réelles positives.

Dans ce cas, les racines carrées a_i des A_i sont réelles et ainsi **si $p<0$ et $p^2-4r>0$, les quatre racines de P sont réelles**.

Si on n'a pas $p<0$ et $p^2-4r>0$, c'est que toutes les racines de R ne sont pas positives, donc une seule, A_1, l'est et les deux autres A_2 et A_3 sont négatives.
a_1 est alors réel, alors que a_2 et a_3 sont imaginairs purs ($a_2\neq\pm a_3$ cf les racines de R sont distinctes).
On en déduit que les racines x_1 et x_2 de P sont imaginaires conjuguées (et pas réelles car $a_2+a_3\neq 0$) et les racines x_3 et x_4 sont imaginaires conjuguées (et pas réelles car $a_2-a_3\neq 0$) :
donc si on n'a pas $p<0$ et $p^2-4r>0$, les quatres racines de P sont imaginaires conjuguées deux à deux.

cas $D(P)>0$ et $q=0$.
On va arriver à la même conclusion que ci-dessus, mais encore faut-il l'écrire..
Dans ce cas $P(X)=X^4+pX^2+r$, $D(P)=16r(p^2-4r)^2$ et donc $r>0$ et $p^2-4r\neq 0$.
Comme $P(x)=0$ <=> $y^2+py+r=0$ avec $y=x^2$, on obtient tout de suite,
P a quatre racines réelles <=> $p^2-4r>0$ (pour avoir 2 solutions réelles en y, qui sont alors forcément non nulles et de même signe car $r>0$) et $-p>0$ (pour que ces solutions en y soient positives).
Ainsi, P a quatre racines réelles <=> $p^2-4r>0$ et $p<0$.

Si on n'a pas $p^2-4r>0$ et $p<0$, alors

- soit $p\geq 0$
  - si $p=0$ alors $P(X)=X^4+r$, et comme $r>0$, P a quatre solutions imaginaires
  - si $p>0$, les deux racines de Y^2+pY+r sont réelles négatives et P a encore quatre solutions imaginaires
- soit $p^2\leq 4r$
  - le cas $p^2=4r$ est impossible car $D(P)>0$ implique $p^2-4r\neq 0$
  - si $p^2<4r$, les racines de Y^2+pY+r sont imaginaires, donc les solutions de P aussi

On arrive bien aux mêmes conclusions que dans le cas $D(P)>0$ et $q\neq 0$.

preuve 3.2) : cas $D(P)<0$

On note A_1 la racine réelle de R, et A_2, A_3 les deux autres racines, imaginaires conjugées.
Comme $\prod A_i=A_1|A_2|^2=q^2$, $A_1\geq 0$.
Comme $a_2^2=A_2$ et $a_3^2=A_3$, $a_2^2-(\mathrm{conj}(a_3))^2=0$ et a_2 et a_3 sont conjuguées ou a_2 et $-a_3$ sont conjuguées :

- si a_2 et a_3 sont conjuguées alors x_1 et x_2 sont réelles alors que x_3 et x_4 sont imaginaires conjuguées (a_2-a_3 qui est imaginaire pur est non nul, sinon $x_3=x_4$, ce qui est exclu le discriminant étant non nul, et donc x_3 et x_4 ne sont pas réelles)
- si a_2 et $-a_3$ sont conjuguées, cette fois c'est x_1 et x_2 qui sont imaginaires conjuguées (et pas réelles) et x_3 et x_4 qui sont réelles

preuve 3.3) : cas D(P)=0 (donc $p^2+12r\geq 0$, cf l'écriture de D(P)).

cas D(P)=0 et $q\neq 0$

On sait que R n'a que des racines réelles, l'une au moins double : voir début de la preuve du 3). Il s'agit de voir dans quel cas R a une racine triple.
Ceci est équivalent à l'existence d'un réel A tel que $R(X)=(X-A)^3$; par identification cela équivaut à $p=-3A/2$, $r=-3A^2/16$, $q^2=A^3$, ce qui entraîne $p^2+12r=0$.
Réciproquement, si $p^2+12r=0$, comme D(P)=0 on a $2p^3/27-8pr/3+q^2=0$, ce qui donne $q^2=-8p^3/27$, donc $p<0$, $r<0$ et $p^2-4r=4p^2/3>0$.
R s'écrit alors $R(X)=X^2+2pX^2+4p^2/3+8p^3/27=(X+2p/3)^3$.
Donc, dans le cas D(P)=0, $q\neq 0$ **R, a une racine triple <=> $p^2+12r=0$**, et alors $p<0$, $r<0$, $p^2-4r>0$, et cette racine triple de R est $-2p/3$.
Dans ce cas, comme $q=(2ep/3)\sqrt{(-2p/3)}$, avec e=-1 ou 1, $P(X)=X^4+pX^2+(2ep/3)\sqrt{(-2p/3)}X-p^2/12$.
On constate alors, si on a une "bonne vue" (voir ci-dessous pour le "deviner") que
$P(X)=(X+(e/2)\sqrt{(-2p/3)})^3(X-(3e/2)\sqrt{(-2p/3)})$, qui a pour racines
$-(e/2)\sqrt{(-2p/3)}$, triple, et $(3e/2)\sqrt{(-2p/3)}$, simple.
Par exemple pour p=-6, $P(X)=X^4-6X^2-8eX-3=(X+e)^3(X-3e)$.
Donc **si D(P)=0, $q\neq 0$, $p^2+12r=0$, alors P n'a que deux solutions, qui sont réelles, l'une triple, l'autre simple**.
<u>Note</u> : en fait on peut trouver les racines de P en utilisant les formules donnant les racines de P en fonction des a_i : on prend $a_1=a_2=a_3=-e\sqrt{(-2p/3)}$, leur produit étant bien q, et on va trouver comme racines $-(e/2)\sqrt{(-2p/3)}$, triple, et $(3e/2)\sqrt{(-2p/3)}$, simple.

Examinons maintenant le cas D(P)=0, $q\neq 0$, $p^2+12r\neq 0$ (donc $p^2+12r>0$).

Dans ce cas R n'a que deux racines, réelles, l'une étant double, puisque il n' y a pas de racine triple.

Notons A_1 la solution réelle simple, donc $A_2=A_3$.
On a $A_1+2A_2=-2p$, $2A_1A_2+A_2^2=p^2-4r$, et $A_1A_2^2=q^2$, donc **$A_1>0$** .
Si $A_2>0$ (cad toutes les racines de R sont positives) alors $p<0$, $p^2-4r>0$.
Réciproquement, si $p<0$ et $p^2-4r>0$:

on a encore $R'(x)=3x^2+4px+p^2-4r$, de discriminant $4(p^2+12r)>0$, donc R' a deux racines réelles u et v positives, avec $u<v$ et le tableau de variation de R vu lors du cas D(P)>0 reste valable : en u il y a maximum et en v il y a minimum ; mais cette fois $R(u)R(v)=-D(P)/27=0$

- soit R(u)=0 et donc R(v)<0, et ainsi u est racine double de R, c'est-à-dire $A_2=A_3=u>0$; l'autre racine , A_1, est $>v>u>0$, et on retrouve bien le fait que A_1 est >0 : toutes les racines (A_1 et A_2) de R sont positives
- soit R(v)=0 et v est racine double de R, donc $A_2=A_3=v>0$: R a encore toutes ses racines positives.

Finalement, si D(P)=0, $q\neq 0$, $p^2+12r\neq 0$, **R a toutes ses racines positives <=> $p<0$ et $p^2-4r>0$**.
Dans ce cas, a_1, a_2, a_3 sont réels et $a_2=\pm a_3$:

- si $a_2=a_3$, $x_3=x_4=a_1/2$, $x_1=-a_1/2+a_2$, $x_2=-a_1/2-a_2$ et P a trois racines distinctes (car $a_2\neq 0$ et $a_1\neq a_2$), qui sont toutes réelles, l'une étant double
- si $a_2=-a_3$, même conclusion

Donc **si D(P)=0, $q\neq 0$, $p^2+12r\neq 0$, $p<0$, $p^2-4r>0$, P a trois racines réelles dont une double**.

Par contre toujours dans le cas D(P)=0, $q\neq 0$, $p^2+12r\neq 0$, si $p\geq 0$ ou $p^2-4r\leq 0$, alors les racines de R ne sont pas toutes positives, donc $A_1>0$ et $A_2=A_3<0$, donc a_1 est réel et a_2 et a_3 (égaux ou opposés) sont imaginaires purs (non nuls) :

- si $a_2=a_3$, $x_3=x_4=a_1/2$, réel, et x_1 et x_2 sont imaginaires conjugés
- si $a_2=-a_3$, $x_1=x_2=-a_1/2$, réel, et x_3 et x_4 sont imaginaires conjugés

Donc **si D(P)=0, $q\neq 0$, $p^2+12r\neq 0$, $p\geq 0$ ou $p^2-4r\leq 0$, P a une racine réelle, double et deux racines imaginaires conjuguées**.

cas D(P)=0, q=0

On a alors $P(X)=X^4+pX^2+r$ et cf $D(P)=16r(p^2-4r)^2$, on a $r(p^2-4r)=0$

- si $r=0$, $P(X)=X^2(X^2+p)$
  - si $p=0$ alors $P(X)=X^4$ et 0 est racine quadruple
  - si $p<0$ alors 0 est racine double et il y a deux autres racines réelles $\pm\sqrt{(-p)}$
  - si $p>0$ alors 0 est racine double et il y a deux racines imaginaires pures $\pm i\sqrt{(p)}$
- si $p^2-4r=0$, alors Y^2+pY+r a une seule racine, $-p/2$
  - si $p=0$, alors $r=0$ et on a encore 0 racine quadruple de P
  - si $p<0$ alors R a deux racines réelles, $\pm\sqrt{(-p/2)}$, doubles chacunes
  - si $p>0$ alors R a deux racines maginaires pures, $\pm i\sqrt{(p/2)}$, doubles chacunes

preuve 3.4)

La première équivalence est un récapitulatif de 3.1, 3.2, 3.3.
Montrons la 2ième équivalence :
si on a $D(P)\geq 0$ et $p<0$ et $p^2>4r$, alors

- soit $D(P)>0$ et on est dans un cas où toutes les racines de P sont réelles
- soit $D(P)=0$ et alors (cf l'écriture de D(P)) soit $p^2+12r>0$, soit $p^2+12r=0$, et à chaque fois, puisque $q\neq 0$, on est aussi dans un cas où les racines de P sont toutes réelles.

Il s'agit maintenant de vérifier que dans chacun des trois cas (cf $q\neq 0$) où P n'a que des racines réelles, on a effectivement $D(P)\geq 0$ et $p<0$ et $p^2>4r$.
Deux des trois cas sont immédiats, le cas $D(P)=0$, $q\neq 0$, $p^2+12r=0$ l'est moins :

on a alors $r\leq 0$, donc $p^2\geq 4r$; mais si $p^2=4r$, alors $r=p=0$, donc $D(P)=-27q^4$ ce qui est en contradiction avec $D(P)=0$ et $q\neq 0$. Donc $p^2>4r$.
Reste à vérifier que $p<0$: $D(P)=0$ et $p^2+12r=0$ impliquent que $2p^3/27-8pr/3+q^2=0$, soit $2p(p^2/27-4r/3)=-q^2$, donc $p<0$.

preuve 4) :

$Q(X-a/4)=(X-a/4)^4+a(X-a/4)^3+b(X-a/4)^2+c(X-a/4)+d=X^4+pX^2+qX+r=P(X)$ avec

- $p=-3a^2/8+b$
- $q=a^3/8-ab/2+c$
- $r=-3a^4/256+a^2b/16-ac/4+d$

Par exemple, si $Q(X)=X^4-4X^3+6X^2-4X+1$, $Q(X+1)=X^4$.

Et évidemment x racine de P <=> $P(x)=0$ <=> $Q(x-a/4)=0$ <=> $x=a/4+r_i$: les racines de P sont $x_i=a/4+r_i$.

P et Q ayant même coefficient de tête (car unitaires) et les carrés des différences deux à deux de leurs racines étant les mêmes, P et Q ont le même discriminant.

9) Etude d'une famille (à trois paramètres) de polynômes du 4ième degré

b, c, d étant trois réels quelconques, on considère les polynômes $P(X)=X^4+pX^2+qX+r$, avec

- **$p=-2b(2d+c^2)$**
- **$q=-4bc(1+bd^2)$**
- **$r=b^2(c^2-2d)^2-b(1+bd^2)^2$**

Remarque 1 :
si on change c en -c, les racines de P changent de signe.

Remarque 2 :
P est bicarré uniquement dans les cas suivants :

- $b=0$: $P(X)=X^4$
- $c=0$: $P(X)=(X^2-2bd)^2-b(1+bd^2)^2$
- $bd^2=-1$: $P(X)=(X^2+2/d+c^2/d^2)^2-8c^2/d^3$, car $p=2(2/d+c^2/d^2)$ et $-p^2/4+r=-8c^2/d^3$
  - $bd^2=-1$ et $c=0$ donnent $P(X)=(X^2+2/d)^2$

- $bd^2=-1$ et $c^2=2d$ donnent $P(X)=X^2(X^2+8/d)$

Remarque 3 :
je ne trouve aucune particularité au polynôme P lorsque d=0.

Le polynôme R défini par $R(X)=X^3+2pX^2+(p^2-4r)X-q^2$ désignera encore le polynôme associé à la résolvante de Descartes de P.

On a les résultats suivants :

1) Les racines de R sont $4bc^2$ et $4bd\pm2(1-bd^2)\sqrt{-b}$, avec $\sqrt{-b}$ une racine 2ième quelconque de -b, éventuellement imaginaire pure, mais si b est un réel négatif, $\sqrt{-b}$ désignera la racine carrée "habituelle" de -b.
Les racines de R sont toutes réelles <=> $b\leq0$.
Rappelons, que ces racines de R permettent de trouver tout de suite les racines de P : voir les formules au chapitre 3) sur la méthode de Descartes.

2) Le discriminant de P est $D(P)=-256b^3(1-bd^2)^2(4b(c^2-d)^2+(1-bd^2)^2)^2$

D(P)=0	<=>	**b=0** ou **$bd^2=1$** ou **b<0 et $d\sqrt{-b}=1$ et [c=0 ou $c^2=2d$]** ou **b<0 et $d\sqrt{-b}\neq1$ et $c^2=(1+d\sqrt{-b})^2/(2\sqrt{-b})$**

Note : si b<0 et $d\sqrt{-b}=1$ et $c^2=(1+d\sqrt{-b})^2/(2\sqrt{-b})$, alors $c^2=2d$.

On vérifie que P a effectivement une racine au moins double chaque fois que D(P)=0 :

- si b=0 alors $P(X)=X^4$
- si $bd^2=1$ alors $P(X)=(X+c/d)^2((X-c/d)^2-4/d)$
- si b<0 et $d\sqrt{-b}=1$ et c=0 alors $P(X)=(X^2+2/d))^2$, cas bicarré
- si b<0 et $d\sqrt{-1}=1$ et $c^2=2d$ alors $P(X)=X^2(X^2+8/d)$, cas bicarré
- si b<0 et $c=(1+d\sqrt{-b})/\sqrt{2\sqrt{-b}}$, cela que $d\sqrt{-b}$ soit égal ou pas à 1, alors P a pour racine double $((d\sqrt{-b}-1)/2)\sqrt{2\sqrt{-b}}$, les deux autres racines étant $\sqrt{2\sqrt{-b}}[(1-d\sqrt{-b})/2\pm(1+d\sqrt{-b})i]$, simples chacune ssi $d\sqrt{-b}\neq-1$.
  Rappel : si on change c en -c, les racines de P changent de signe.

  Si $d\sqrt{-b}=1$, alors $c^2=2d$, et on retrouve bien le résultat précédent, à savoir que 0 est racine double de P, les deux autres étant $\pm2\sqrt{2\sqrt{-b}}i=\pm2\sqrt{2/d}i$.

  Donnons 2 exemples avec $d\sqrt{-b}\neq1$:

  - si b=-1, d=0, alors $c=1/\sqrt{2}$, et
    $P(X)=X^4+X^2+(4/\sqrt{2})X+5/4=(X+\sqrt{2}/2)^2(X^2-\sqrt{2}X+5/2)$
  - si b=-4, d=3, alors c=7/2, et
    $P(X)=X^4+146X^2-1960X+5525=(X-5)^2(X^2+10X+221)$

Le lecteur aura probablement remarqué que si c=0 (P est alors bicarré) et $bd^2=-1$, $P(X)=(X^2-2bd)^2=(X^2+2/d)^2$, donc P a deux racines doubles, et donc D(P) doit être nul.
Ce cas se retrouve-t-il parmi les quatre cas possibles de nullité de D(P)?
Oui, car soit on a alors c=0 et b<0 et $d\sqrt{-b}=-1$, et c'est le 3ième cas, soit on a c=0 et b<0 et $d\sqrt{-b}=-1$, et on est dans le 4ième cas.

Enfin, par application du paragraphe 8), on voit par exemple, que si b>0 et $bd^2\neq1$, alors D(P)<0 et P a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées.

3) Si b est le carré d'un rationnel et si c et d sont rationnels alors P est réductible dans Q[X].

Dans le cas particulier $bd^2=1$, et b, c, d rationnels, alors b est le carré d'un rationnel et la réductibilité dans Q[X] a déjà été constatée au 2) ci-dessus.

4)Si P est irréductible et si b<0 et si -b n'est pas un carré dans Q, alors le groupe de Galois (sur Q) de P est isomorphe au groupe diédral D_4, d'ordre 8.
C'est le cas si c=d=0 et b=-2, car alors $P(X)=X^4-b=X^4+2$, qui est irréductible (cf Einsenstein).
Le fait que le groupe de Galois de ce polynôme X^4+2 soit isomorphe à D_4 est pratiquement proposé en exercice dans tout cours sur Galois.
Notons aussi que si c=d=0 et b=2, on obtient $P(X)=X^4-2$ dont le groupe de Galois est aussi isomorphe à D_4 (Ga 22/12/2).

5) Cette famille de polynômes, pour b, c, d rationnels et b n'étant pas une puissance 4ième d'un rationnel a été présentée, dans un groupe de discussion, comme la famille de tous les polynômes unitaires du 4ième degré dont le groupe de Galois sur Q est isomorphe à Z/4Z (donc cyclique).
Ceci est en fait faux, car par exemple, cf le 4) ci-dessus, le groupe de Galois des polynômes X^4-2 (c=d=0, b=-2) et X^4+2 (c=d=0, b=2) n'est pas isomorphe à Z/4Z ; et aussi, cf le 3) ci-dessus, en prenant b=4, P est réductible dans Q [X], et donc son groupe de Galois n'est pas isomorphe à Z/4Z (Ga/13/0/4/0).

En fait, quelque soient b, c, d rationnels, le groupe de Galois (sur Q) du polynôme P n'est pas isomorphe à Z/4Z.

preuve de 1)

$p^2-4r=4b^2(2d+c^2+c^2-2d)(2d+c^2-c^2+2d)+4b(1+bd^2)^2=32b^2c^2d+4b(1+bd^2)^2$
$R(4bc^2)=64b^3c^6-4b(2d+c^2)\times16b^2c^4+128b^3c^4d+16b^2c^2(1+bd)^2-16b^2c^2(1+bc^2(1+bd^2)^2$
$R(4bc^2)=16b^3c^2(4c^4-4(2d+c^2)c^2+8c^2d)=0$, c'est-à-dire **$4bc^2$ est toujours une racine de R**

Les deux autres racines de R, u et v, vérifient $4bc^2+u+v=-2p=4b(2d+c^2)$ et $4bc^2uv=q^2=16b^2c^2(1+bd)^2$.

- si $bc\neq0$
  $u+v=8d$ et $uv=4b(1+bd^2)^2$, donc u et v sont racines de $X^2-8bdX+4b(1+bd^2)^2$, dont le discriminant est $64b^2d^2-16b(1+2bd^2+b^2d^4)=-16b(-4bd^2+1+2bd^2+b^2d^4)=-16b(1-bd^2)^2$.
  Donc **les deux autres racines de R sont $4bd\pm2(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$**.
- si $bc=0$
  - soit b=0 et p=q=r=0, donc $R=X^3$ qui a 0 comme racine triple, ce qu'on retrouve en fait faisant b=0 dans le résultat précédent
  - soit c=0 et alors q=0, $R(X)=X(X^2-8bdX+4b(1+bd^2)^2)$, dont les racines sont 0 et $4bd\pm(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$, ce qu'on retrouve en faisant c=0 dans le résultat précédent.

On vérifie que

- la somme des racines de R est $4bc^2+8bd=4b(2d+c^2)=-2p$
- leur produit est $4bc^2(16b^2d^2+4b(1-bd^2)^2)=16b^2c^2(4bd^2+(1-bd^2)^2)=16b^2c^2(1+bd^2)^2=q^2$

preuve de 2)

Cf paragraphe 8),D(P)=D(R) et en notant, $4bc^2$, u, v les quatre racines de R, $D(R)=(4bc^2-u)^2(4bc^2-v)^2(u-v)^2$. Ce qui donne
$D(P)=(16b^2c^4-4bc^2(u+v)+uv)^2(16(1-bd^2)^2\times-b)$
$D(P)=(16b^2c^4-32b^2c^2d+4b(1+bd^2)^2)^2(16(1-bd^2)^2\times-b)$
$D(P)=16b^2(4bc^4-8bc^2d+(1+bd^2)^2)^2(16(1-bd^2)^2\times-b)$
$D(P)=16b^2(4b(c^2-d)^2-4bd^2+(1+bd^2)^2)^2(16(1-bd^2)^2\times-b)$
$D(P)=16b^2(4b(c^2-d)^2+(1-bd^2)^2)^2(16(1-bd^2)^2\times-b)$
$\mathbf{D(P)=-256b^3(1-bd^2)^2(4b(c^2-d)^2+(1-bd^2)^2)^2}$

Il est alors clair que D(P)=0 <=>0 b=0 ou $bd^2=1$ ou $4b(c^2-d)^2+(1-bd^2)^2=0$.
Examinons la dernière possibilité lorsque $b\neq0$ et $bd^2\neq1$.
Elle équivaut à $(c^2-d)^2=-(1-bd^2)^2/(4b)$
<=> b<0 et $c^2-d=\pm(1-bd^2)/2\sqrt{(-b)}$, car si b>0 il faut $c^2=d$ et $bd^2=1$, cas exclu

<=> $b<0$ et $[c^2=d+(1-bd^2)/(2\sqrt{(-b)})$ ou $c^2=d-(1-bd^2)/(2\sqrt{(-b)})]$
<=> $b<0$ et $[c^2=(1+d\sqrt{(-b)})^2/(2\sqrt{(-b)})$ ou $c^2=-(1-d\sqrt{(-b)})^2/(2\sqrt{(-b)})]$
<=> $b<0$ et $[[d\sqrt{(-b)}\neq 1$ et $c^2=(1+d\sqrt{(-b)})^2/(2\sqrt{(-b)})]$ ou $[d\sqrt{(-b)}=1$ et $[c^2=2d$ ou $c=0]]]$

Une vérification pour R :
si $b=-4$, $d=2$, et $c^2=(1+d\sqrt{(-b)})^2/(2\sqrt{(-b)})=(5/2)^2$, les racines de R sont $4bc^2=-100$ et $4bd\pm 2(1-bd^2)\sqrt{(-b)}=-32\pm 68$ et -100 est racine double de R.

Pour ce qui est des vérifications pour P données dans la remarque 2, je laisse le lecteur les contrôler, exceptées les deux suivantes.
cas $bd^2=1$

- $p=-2(2d+c^2)/d^2$
- $q=-8c/d^2$
- $r=c^2(c^2-4d)/d^4$
- Donc $P(X)=X^4-2(c^2/d^2)X^2+c^4/d^4-(4/d)X^2-8cX/d^2-4dc^2/d^4$
  $P(X)=(X^2-c^2/d^2)^2-(4/d)(X+c/d)^2=(X+c/d)^2((X-c/d)^2-4/d)$.
  <u>Remarque</u> : si $d>0$, toutes les racines de P sont réelles, donc on devrait retrouver le résultat du 3.4 du paragraphe 8 précédent.
  Comme $d>0$, $p<0$:
    - si $c=0$ alors $q=0$ et on est bien dans un des quatre cas du 3.4
    - si $c\neq 0$ alors $q\neq 0$ et comme $p^2-4r=(16d+32c^2)/d^3>0$ et $p^2+12r=16(d-c^2)^2/d^4\geq 0$ (en fait c'était obligé car D (P)=0 implique $p^2+12r\geq 0$) et on sera bien encore dans un des quatre cas du 3.4, que p^2+12r soit positif ou nul.
      <u>Note</u> : pour calculer p^2-4r et p^2+12r on peut utiliser les valeurs ci-dessus de p,q,r ; mais pour p^2-4r on peut se servir de $p^2-4r=32b^2c^2d+4b(1+bd^2)^2$ (voir début de la preuve du 1)), ce qui donne
      $p^2-4r=32c^2/d^3+16/d^2$.

cas $b<0$ et $c=(1+d\sqrt{(-b)})/\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}$.

- $c^2=d+1/(2\sqrt{(-b)})+d^2\sqrt{(-b)}/2$
- $c^2-2d=((1+d\sqrt{(-b)})^2-4d\sqrt{(-b)})/(2\sqrt{(-b)})=(1-d\sqrt{(-b)})^2/(2\sqrt{(-b)})$
- $p=-2b(2d+c^2)=-2b(3d+1/(2\sqrt{(-b)})+d^2\sqrt{(-b)}/2)=\sqrt{(-b)}(1+6d\sqrt{(-b)}-bd^2)$
- $q=-4bc(1+bd^2)=-4b(1+d\sqrt{(-b)})(1+bd^2)/\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}$, en prenant $c>0$
- $r=b^2(c^2-2d)^2-b(1+bd^2)^2=b^2(1-d\sqrt{(-b)})^4/(-4b)-b(1-d\sqrt{(-b)})^2(1+d\sqrt{(-b)})^2$
  $r=-b(1-d\sqrt{(-b)})^2((1-d\sqrt{(-b)})^2/4+(1+d\sqrt{(-b)})^2)=-b(1-d\sqrt{(-b)})^2(5+6d\sqrt{(-b)}-5bd^2)/4$

  Si $d\sqrt{(-b)}=1$:
  alors $p=\sqrt{(-b)}(7+1)=8/d$, $q=r=0$ et $P(X)=X^2(X^2+8/d)$ et $(d\sqrt{(-b)}-1)\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}/2=0$ est bien racine double de P, et $\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}[(1-d\sqrt{(-b)})/2\pm(1+d\sqrt{(-b)})i]=\pm 2\sqrt{(2/d)}i$ sont bien les deux autres racines de P. On retrouve le cas particulier précédent puisqu' alors $c^2=2d$.

  Si $d\sqrt{(-b)}\neq 1$:
  posons alors $h=(d\sqrt{(-b)}-1)\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}/2$: montrer que h est racine double de P c'est montrer qu'il existe deux réels m et n tels que $P(X)=(X-h)^2(X^2+mX+n)$.
  Ceci équivaut à $m-2h=0$ et $n-2m+h^2=p$ et $-2hn+h^2m=q$ et $h^2n=r$.
  Donc nécessairement $m=2h=(d\sqrt{(-b)}-1)\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}$ et $n=r/h^2=\sqrt{(-b)}(5+6d\sqrt{(-b)}-5bd^2)/2$ (cette division par h est licite car $d\sqrt{(-b)}\neq 1$ et donc $h\neq 0$).
  Il s'agit alors de vérifier que pour ces valeurs de m et n on a effectivement $n-2hm+h^2=p$ et $-2hm+h^2m=q$.

    - $n-2hm+h^2=n-3h^2=\sqrt{(-b)})(5+6d\sqrt{(-b)}-5bd^2-3(d\sqrt{(-b)}-1)^2)/2=\sqrt{(-b)})(2+12d\sqrt{(-b)}-2bd^2)/2$, qui est bien p.
    - $-2hn+h^2m=h(-2n+2h^2)=h(-\sqrt{(-b)}(5+6d\sqrt{(-b)}-5bd^2)+(d\sqrt{(-b)}-1)^2\sqrt{(-b)})=h\sqrt{(-b)}(-4-8d\sqrt{(-b)}+4bd^2)$
      $=-4h\sqrt{(-b)}(1+d\sqrt{(-b)})^2$
      $=2\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}\sqrt{(-b)}(1-d\sqrt{(-b)})(1+d\sqrt{(-b)})^2=2\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}\sqrt{(-b)}(1+d^2b)(1+d\sqrt{(-b)})$
      Mais $2\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}\sqrt{(-b)}=-4b/\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}$, et on a bien $-2hn+h^2m=q$.

  On peut montrer tout de suite que cette racine double h de P ne peut être triple : si c'était le cas, comme la somme des racines de P est 0, les racines de P seraient h, non nulle et triple et -3h, simple.
  Donc $h^3\times(-3h)=r$ (cf produit des racines de P), donc r serait <0 ; or cf $d\sqrt{(-b)}\neq 1$, $r>0$, donc contradiction.

En fait, on peut sans difficulté, expliciter les autres racines de P, cad les racines de X^2+mX+n :

le discriminant est $m^2-4n=2\sqrt{(-b)}(d\sqrt{(-b)}-1)^2-2\sqrt{(-b)}(5+6d\sqrt{(-b)}-5bd^2)$
$=2\sqrt{(-b)}(-4+4bd^2-8d\sqrt{(-b)})=-8\sqrt{(-b)}(1+d\sqrt{(-b)})^2<0$.
Les deux racines de X^2+mX+n sont donc $[-m \pm 2\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}(1+d\sqrt{(-b)}i]/2$, ce qui donne le résultat annoncé : $\sqrt{(2\sqrt{(-b)})}[(1-d\sqrt{(-b)})/2\pm(1+d\sqrt{(-b)})i]$

preuve de 3)

on suppose donc que b est le carré d'un rationnel, donc $b\geq0$, et c et d rationnels.
Notons $A_1=4bc^2$, $A_2=4bd+2(1-bd^2)\sqrt{b}i$ et $A_3=4bd-2(1-bd^2)\sqrt{b}i$ les trois racines de R : A_1 est dans Q, alors que A_2 et A_3 sont dans Q(i).
Prenons a_2 et a_3 des racines 2ièmes respectives de A_2 et A_3 qui soient conjuguées (c'est possible car A_2 et A_3 le sont), et alors on prend pour a_1 la racine 2ième de A_1 telle que $\prod a_i=q$.
Donc $a_1=\pm2c\sqrt{b}$, $a_2=e+if$, $a_3=e-if$, avec e et f réels.
Les racines de P sont alors (voir méthode de Descartes), $x_1=(-a_1+2e)/2$, $x_2=(-a_1-2e)/2$, $x_3=(a_1+2if)/2$, $x_4=(a_1-2if)/2$: si $f\neq0$ deux uniquement sont réelles et deux sont imaginaires conjuguées, ce qui était attendu car dans ce cas A_2 n'est pas réel, donc $bd^2\neq1$ et $b\neq0$, donc $D(P)<0$ et on retrouve bien le résultat 3.2 du paragraphe 8.
P s'écrit alors $P(X)=(X^2-(x_1+x_2)X+x_1x_2)(X^2-(x_3+x_4)X+x_3x_4)$.
$x_1+x_2=-a_1$ et $x_3+x_4=a_1$ sont rationnels (puisque, notamment, b est le carré d'un rationnel).
$x_1x_2=a_1^2/4-e^2$, $x_3x_4=a_1^2/4+e^2$.
Mais $a_2^2=A_2$, donc $e^2-f^2+2efi=A_2$, et ainsi e^2-f^2 est rationnel.
Et $\prod a_i=q$, donne si $q\neq0$, $e^2+f^2=q/a_1$, qui est rationnel.
Ainsi, e^2-f^2 et e^2+f^2 sont rationnels, donc e^2 et f^2 aussi, donc x_1x_2 et x_3x_4 aussi et **P est bien le produit de deux polynômes du second degré à coefficients dans Q**.
Reste à voir cependant le cas q=0, car si q=0, à priori a_1 peut être nul et on ne peut considérer q/a_1.
$q=-4bc(1+bd^2)$, et comme $b\geq0$ (c'est le carré d'un rationnel), q=0 n'est possible que si b=0 ou c=0, ce qui implique d'ailleurs $a_1=0$!
En fait

- si b=0, $P(X)=X^4$
- si c=0, $P(X)=X^4-4bdX^2+4b^2d^2-b(1+bd^2)^2=(X^2-2bd)^2-b(1+bd^2)^2=(X^2-2bd-\sqrt{b}(1+bd^2))(X^2-2bd+\sqrt{b}(1+bd^2))$

Et donc, même dans ces deux cas particuliers, P est bien réductible dans Q[X].

preuve de 4)

Les racines de R sont $A_1=4bc^2\leq0$ et A_2, $A_3=4bd\pm2(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$, avec $\prod A_i=q^2$.
P étant irréductible, ses racines sont simples donc $D(P)\neq0$, donc, outre $\mathbf{b\neq0}$ (qui résulte en fait de l'hypothèse b<0) on a $\mathbf{bd^2\neq1}$.
$A_2A_3=16b^2d^2-4(1-bd^2)^2(-b)=4b(1+bd^2)^2$; comme $\mathbf{bd^2\neq-1}$ (car -b n'est pas un carré dans Q) on a $A_2A_3<0$.
Choisissons e=-1 ou e=1 tel que $A_2=4bd-2e(1-bd^2)\sqrt{(-b)}<0$ et $A_3=4bd+2e(1-bd^2)\sqrt{(-b)}>0$.
Soient alors $a_1=2e'ic\sqrt{(-b)}$, $a_2=i\sqrt{(-A_2)}$, $a_3=\sqrt{(A_3)}$ avec e'= -1 ou 1 tel que $\prod a_i=q$; si q=0, c'est que c=0 et $a_1=A_1=0$ et alors peu importe le choix de e'.
Cf le chapitre 3 sur la méthode de Descartes, les racines de P sont (que q soit nul ou pas)
$r_1=(-a_1+a_2+a_3)/2$, $r_2=(-a_1-a_2-a_3)/2$, $r_3=(a_1+a_2-a_3)/2$, $r_4=(a_1-a_2+a_3)/2$.
Puisque $D(P)>0$ (car b<0), d'après le 3.1) les racines de P sont soient réelles distinctes, soient imaginaires (non réelles) conjuguées 2 à 2 : on vérifie sans difficulté qu'ici les racines de P sont imaginaires conjuguées 2 à 2.
Le corps de décomposition de P est $\mathbf{E=Q(r_1,r_2,r_3)}$; a_1, a_2, a_3 s'obtenant comme somme des racines de P, $Q(a_1,a_2,a_3)$ est inclu dans E ; mais $Q(a_1,a_2,a_3)$ contient évidemment les racines de P, donc E, et ainsi $\mathbf{E=Q(a_1,a_2,a_3)}$, qui se réduit à $Q(a_2,a_3)$ si c=0.
On va simplifier cette écriture de E.

$-a_2^2+a_3^2=-A_2+A_3=4e(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$ est dans E, et comme $4e(1-bd^2)$ est aussi dans E (c'est un rationnel, non nul), $\sqrt{(-b)}$ est dans E (rapport de deux éléments de E).
De $-A_2A_3=-4b(1+bd^2)^2$, on tire $\sqrt{(-A_2)}\sqrt{(A_3)}=2|1+bd^2|\sqrt{(-b)}$, donc $\sqrt{(-A_2)}\sqrt{(A_3)}=(a_2/i)a_3$ est dans E ; mais a_2a_3 étant aussi dans E, i est dans E (quotient de deux éléments de E), et donc a_2/i est aussi dans E.
Finalement E contient i, a_2/i, a_3 et ainsi $\mathbf{E'=Q(i,a_2/i,a_3)}$ est inclu dans E.
E' contient évidemment $a_2=i\times(a_2/i)$ et a_3, et aussi $(a_2/i)^2+a_3^2=4e(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$; donc $\sqrt{(-b)}$ est dans E' (car

quotient de deux éléments de E'), donc $a_1=2e'ic\sqrt{(-b)}$ est dans E' ; ainsi E' contient a_1, a_2, a_3, donc contient $Q(a_1,a_2,a_3)=E$, et finalement, cf on a l'inclusion dans les deux sens, **E=E'**.
Poursuivons.
Bien sûr **E''=Q(i,a_3)** est inclu dans E' : montrons l'inclusion dans l'autre sens.
E'' contient évidemment i et a_3, et donc aussi $a_3^2=4bd+2e(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$, donc $\sqrt{(-b)}$ est dans E'' puisque c'est un quotient de deux éléments de E'' .
Et comme $(a_2/i)a_3=\sqrt{(-A_2)}\sqrt{(A_3)}=2|1+bd^2|\sqrt{(-b)}$, a_2/i est dans E'' (quotient), et ainsi E'' contient i, a_2/i et a_3, donc il contient E', et cf on a l'inclusion dans l'autre sens, c'est que **E'=E''**

Finalement, E=E'=E'', soit **E=Q(i,a_3)**

De cette relation, on va en déduire le degré de l'extension : $[E:Q]=[E:Q(i)][Q(i):Q]=2k$ avec $k=[Q(i)(a_3):Q(i)]$, cela parceque $E=Q(i)(a_3)$ et $[Q(i):Q]=2$; k est donc le degré du polynôme minimal de a_3 sur Q(i).
On remarque que puisque $a_3^2=4bd+2e(1-bd^2)\sqrt{(-b)}$, c'est que a_3 est racine du polynôme $T(X)=(X^2-4bd)^2+4b(1-bd^2)^2$, polynôme qui est à coefficient dans Q, donc dans Q(i) : ainsi le polynôme minimal de a_3 divise T dans Q(i)[X].
En fait, on va montrer que T est irréductible sur Q(i), et donc T sera le polynôme minimal de a_3 sur Q(i).

Il est immédiat de vérifier que $T(X)=(X^2-a_2^2)(X^2-a_3^2)$, et donc les racines, dans C, de T sont $\pm a_2$ et $\pm a_3$.
Notons tout de suite que les carrés de ces racines, à savoir A_2 et A_3 (qui sont réels), ne sont pas des rationnels, car si A_2 ou A_3 était rationnel, alors $\sqrt{(-b)}$ serait un rationnel, donc -b serait un carré dans Q, ce qui est exclu par hypothèse.
Et même mieux : A_2 et A_3 ne sont pas dans Q(i), car comme ils sont réels, s'ils étaient dans Q(i), ils seraient dans Q (puisque Q(i) est l'ensemble des nombres complexes de la forme a+bi avec a et b dans Q), ce qui, on vient de le voir, n'est pas vrai, et donc, aussi, $\pm a_2$ et $\pm a_3$ ne sont pas dans Q(i).
Si T est réductible sur Q(i), alors

- soit T est le produit, dans Q(i)[X], d'un premier degré par un troisième degré et donc T aurait une racine (forcément $\pm a_2$ ou $\pm a_3$) dans Q(i), ce qui, on vient de le voir est impossible
- soit T est le produit, dans Q(i)[X], de deux polynômes du 2ième degré irréductibles sur Q(i) : soit U un de ces deux polynômes.
  Dans C, ses racines ne peuvent qu'être que parmi $\pm a_2$ et $\pm a_3$ et le produit de ces deux racines doit être dans Q(i), d'où
  - soit U a pour racines $-a_2$ et a_2, et alors $-A_2$ serait dans Q(i), ce qui n'est pas vrai
  - soit U a pour racines $-a_3$ et a_3, et alors $-A_3$ serait dans Q(i), ce qui n'est pas vrai
  - soit U a pour racines $\pm a_2$ et $\pm a_3$, et cette fois c'est $a_2a_3=2|1+bd^2|\sqrt{(-b)}i$ qui doit être dans Q(i), ce qui est faux car $\sqrt{(-b)}$ n'est pas rationnel

Donc T est irréductible sur Q(i), donc c'est le polynôme minimal de a_3 et ainsi k=4, soit **[E:Q]=8**.
Donc le groupe de Galois, sur Q, du polynôme P est d'ordre 8 ; or le groupe de Galois d'un polynôme de degré 4 irréductible est (Ga/13/3/0/4/0) isomorphe soit à Z/4Z, soit au groupe de Klein (groupe d'ordre 4 non cyclique), soit à D_4, soit à A_4, soit à S_4, et donc **le groupe de galois de P, sur Q, est isomorphe au groupe diédral D_4 d'ordre 8**.

preuve de 5)

Il s'agit de montrer, pour b, c, d rationnels, qu'aucun des polynômes P de cette famille n'a un groupe de Galois, Gal (P), sur Q, isomorphe à Z/4Z.

- soit P est réductible sur Q, et alors Gal(P) n'est pas isomorphe à Z/4Z (Ga/13/3/0/4/0) ; par exemple si b=0 $P(X)=X^4$ et $Gal(P)=\{id_Q\}$.
- soit P est irréductible, donc $b\neq0$
  - soit b>0, donc D(P)<0 et P a deux racines réelles et deux racines imaginaires conjuguées, donc Gal(P) n'est pas commutatif (Ga/12/5/1), et ainsi il n'est pas isomorphe à Z/4Z
  - soit b<0
    - soit -b est un carré dans Q et alors D(P) est aussi un carré et donc Gal(P) est isomorphe à un sous-groupe (transitif) de A_4, donc isomorphe à A_4 ou au groupe de Klein, donc pas isomorphe à Z/4Z (Ga/13/3/0/4)
    - soit -b n'est pas un carré dans Q et cf la question précédente, Gal(P) est isomorphe à D_4, donc pas à Z/4Z.

Et ainsi on a prouvé qu'**aucun des polynômes P de cette famille n'a un groupe de Galois, sur Q, isomorphe à Z/4Z**.

10) Si un polynôme de degré 4 à coefficients rationnels a une seule racine réelle, alors cette racine est rationnelle.

preuve (suivie d'un exemple)

Soit P un tel polynôme : quitte à le diviser par son coefficient de tête (ce qui ne change pas ses racines et laisse ses coefficients rationnels) on peut supposer P unitaire, cad
$P(X)=X^4+a_3X^3+a_2X^2 +a_1X^1+a_0=(X-r)Q(X)$, les a_i étant des rationnels et Q un polynôme unitaire à coefficients réels de degré 3.
Q ayant 3 comme degré il a obligatoirement une racine réelle, mais cette racine réelle de Q est aussi racine de P, donc c'est r : $P(X)=(X-r)^2(X^2+bX+c)$, avec b et c réels.
r est donc au moins racine double de P, donc elle est aussi racine de P', donc elle est racine du reste R_1 de la division euclidienne, dans Q[X], de 4P par P'.
Cette division se fait sans difficulté à "la main" :

$4P(X)=(X+a_3/4)P'(X)+R_1(X)$
avec $4R_1(X)=(8a_2-3a_3^2)X^2+(12a_1-2a_2a_3)X+16a_0-a_1a_3$

- Si $R_1=0$ (polynôme nul) alors
  $4P(X)=(X+a_3/4)P'(X)$ et donc $-a_3/4$ est racine de P et ainsi $r=-a_3/4$, donc r est rationnelle.
  On verra à la remarque 1 que dans ce cas $P(X)=(X+a_3/4)^4$.
- Si R_1 n'est pas le polynôme nul,
  - soit $8a_2-3a_3^2=0$, et donc $12a_1-2a_2a_3\neq0$ (sinon $4R_1$ serait un polynôme constant ayant r comme racine donc ce serait le polynôme nul, ce qui est contraire à l'hypothèse faite).
    $4R_1$ est donc de degré 1 et sa seule racine est le rationnel $(-16a_0+a_1a_3)/(12a_1-2a_2a_3)$; mais cette racine est r donc r est rationnelle (rappel : les a_i sont rationnels).
  - soit $8a_2-3a_3^2\neq0$
    Là aussi, r étant racine de P', r est racine du reste R_2 de la division euclidienne dans Q[X] de P' par $4R_1$:
    $P'=4VR_1+R_2$ avec $R_2(X)=cX+d$, $V(X)=eX+f$ (voir à la remarque 2 les valeurs des rationnels c,d,e,f en fonction des a_i)
    - Si $R_2=0$
      alors $P'=4VR_1$ et $4P(X)=((X+a_3/4)4V(X)+1)R_1(X)$.
      Comme on est dans le cas où R_1 est de degré 2 et que r est une de ses racines, l'autre racine r' de R_1 est telle que $r+r'=(-12a_1+2a_2a_3)/(8a_2-3a_3^2)$, quantité rationnelle.
      Mais r' est aussi racine de P, donc cf l'hypothèse sur P, r'=r, donc 2r est rationnel, et la racine r de P est rationnelle.
    - Si $R_2\neq0$
      alors $c\neq0$ (sinon c=0 et R_2 serait un polynôme constant ayant r pour racine, donc ce serait le polynôme nul, ce qui est contraire à l'hypothèse faite), et donc la seule racine de R_2 est le rationnel -d/c ; mais cette racine est r, donc r est encore rationnelle.

Remarque 1 :
dans le cas où $R_1=0$, alors tous ses coefficients sont nuls, cad

$8a_2=3a_3^2, 6a_1=a_2a_3,\ 16a_0=a_1a_3$

En calculant alors a_2,a_1,a_0 en fonction de a_3,
on obtient $P(X)=X^4+a_3X^3+(3/8)a_3^2X^2+(1/16)a_3^3X+(1/256)a_3^4=(X+a_3/4)^4$.
On peut aussi obtenir ce résultat à en utilisant l'aspect équation différentielle de la relation $4P=(X+a_3/4)P'$, mais à mon avis ce n'est pas plus rapide.

Remarque 2 :
dans le cas où $R_1\neq0$ et $p=8a_2-3a_3^2\neq0$, on a (soit on fait la division euclidienne de P' par $4R_1$, soit on part de $P'=4VR_1+R_2$ et on identifie)

$c=(16a_2^2-64a_0-32a_1a_3)/p+4(12a_1-2a_2a_3)^2/p^2$
$d=a_1-(32a_2a_3-9a_3^3-48a_1)(16a_0-a_1a_3)/p^2$

$e=4/(8a_2-3a_3^2)$
$f=(32a_2a_3-9a_3^3-48a_1)/p^2$

On a $(16a_0-a_1a_3)f=a_1-d$, relation qui correspond à l'identification des termes constants de la relation $P'=4VR_1+R_2$.

Remarque 3 :
Les deux divisions euclidiennes faites ci-dessus sont les deux premières étapes de l'algorithme d'Euclide pour obtenir le pgcd de 4P et P'.

Exemple
$P(X)=X^4-3X^3+3X^2-8X+12=(X-2)^2(X^2+X+3)$.
Les deux divisions euclidiennes donnent successivement
$4R_1(X)=-3X^2-78X+168$, de degré 2
$R_2(X)=cX+d=3168X-6336$ (cf remarque 2), donc $r=-d/c=2$.
On a aussi $V(X)=(-4/3)X+113/3$.

FIN

Retour sommaire sur les équations ou chapitre 7 sur les équations ou sommaire du site