sommaire du site

Chapitre 4

Résolution dans C de l'équation (E) $x^3+px+q=0$

avec p et q réels

Formule de Cardan (1501-1576)-Tartaglia (1499-1557)

Méthode de Viète (1540-1603)

$4p^3+27q^2>0$	En posant $u=\{-q/2-\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}\}^{1/3}$ et $v=\{-q/2+\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}\}^{1/3}$ où pour tout réel x, la quantité $x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$ désigne l'unique réel dont le cube est x : les 3 solutions distinctes de (E) sont (u et v étant réels) $u+v$ (réelle) $ju+j^2v=-(u+v)/2+i(\sqrt{3}/2)(u-v)$ (imaginaire) $j^2u+jv=-(u+v)/2-i(\sqrt{3}/2)(u-v)$ (imaginaire) Ce sont ces formules qui sont appelées les formules de **Cardan-Tartaglia**, mathématiciens italiens. Tartaglia a trouvé le premier ces formules mais c'est Cardan qui les a publiées malgrè la promesse de ne pas le faire, d'où une querelle célèbre! Pour les curieux : si $p=0$ (donc $q\neq 0$) alors $\{u;v\}=\{(-q)^{1/3};0\}$ et les formules de C-T donnent bien comme solutions de $x^3+q=0$ les trois racines 3ièmes de -q, à savoir $(-q)^{1/3}$, $(-q)^{1/3}j$, $(-q)^{1/3}j^2$ et si $q=0$ (donc $p>0$) alors $u=(-\sqrt{[(p/3)^3]})^{1/3}=-\sqrt{(p/3)}$, $v=-u$ et les formules de C-T donnent bien comme solutions de $x^3+px=0$ les trois nombres $0, i\sqrt{p}, -i\sqrt{p}$.
$4p^3+27q^2=0$	soit $p=0$ et alors $q=0$ et l'équation est $x^3=0$ soit $p\neq 0$, donc $q\neq 0$, et (rappel !) (E) n'a que 2 solutions $3q/p$ (réelle, simple) et $-3q/(2p)$ (réelle, double) Remarquons que si on remplace $4p^3+27q^2$ par 0 dans les formules de Cardan ci-dessus on a $u=v=(-q/2)^{1/3}$ et donc on n'obtient plus

<table>
<tr><td></td><td>que deux solutions : 2u et -u qui sont bien 3q/p et -3q/(2p) puisque $(-q/2)^{1/3}=3q/(2p)$</td></tr>
<tr><td>$4p^3+27q^2<0$</td><td>Formules de Viète (mathématicien français)

en posant $\theta=\mathrm{Arccos}(3q/(2p\sqrt{(-p/3)}))$,

c'est-à-dire θ est le seul réel dans]0;π[tel que $\cos\theta=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$

les trois solutions, réelles, de (E) sont

$x_1= 2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3)$; $x_2=2\sqrt{(-p/3)}\cos((\theta+2\pi)/3)$; $x_3=2\sqrt{(-p/3)}\cos((\theta+4\pi)/3)$

avec $-2\sqrt{(-p/3)}<x_2<x_3<x_1<2\sqrt{(-p/3)}$

Cas particulier : si q=0 (donc p<0) alors $\theta=\pi/2$ et $x_1=\sqrt{(-p)}$, $x_2=-\sqrt{(-p)}$, $x_3=0$, qui sont bien les trois solutions de $x(x^2+p)=0$.</td></tr>
<tr><td>$4p^3+27q^2>0$

et $p\neq0$</td><td>Alternative à la formule de Cardan pour la seule solution réelle a de (E)

si p<0 et q<0 : $a=2\sqrt{(-p/3)}\mathrm{ch}(\varphi/3)$ avec $\mathrm{ch}\varphi=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$

si p<0 et q>0 : $a=-2\sqrt{(-p/3)}\mathrm{ch}(\varphi/3)$ avec $\mathrm{ch}\varphi=-3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$

si p>0 : $a=2\sqrt{(p/3)}\mathrm{sh}(\varphi/3)$ avec $\mathrm{sh}\varphi=-3q/(2p\sqrt{(p/3)})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Simplification des formules de Cardan

soit a une solution réelle de l'équation (E)

si $4p^3+27q^2<0$ les 2 autres solutions sont : $-a/2\pm\sqrt{(-3a^2/4-p)}$ (réelles)

si $4p^3+27q^2>0$ les 2 autres solutions sont : $-a/2\pm i\sqrt{(3a^2/4+p)}$ (imaginaires conjuguées)

et toujours dans le cas $4p^3+27q^2>0$ on a

$(-q/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2]})^{1/3}=a/2+\varepsilon\sqrt{(a^2/4+p/3)}$ avec ε=1 ou -1

et si p, q, a sont dans Q alors

u et v sont (conjugués) dans $Q(\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2]})=Q(\sqrt{[(4p^3+27q^2)/3]})$

$-q/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}$ pour ε=1 et -1 sont des cubes dans $Q(\sqrt{[(4p^3+27q^2)/3]})$

et les trois racines de (E) sont dans $Q(i\sqrt{[4p^3+27q^2]})$

de façon analogue si $4p^3+27q^2<0$ et si p,q,a sont dans Q alors

$-q/2+\varepsilon i\sqrt{[-((p/3)^3+(q/2)^2))]}$ pour ε=1 et -1 sont des cubes dans $Q(i\sqrt{[-(4p^3+27q^2)/3]})$

et les trois racines de (E) sont dans $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Pour tous réels a et b on a la "magnifique" formule :

$[(a/2)(a^2/4+b^2)+ b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})]^{1/3}+[(a/2)(a^2/4+b^2)- b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})]^{1/3}=a$</td></tr>
</table>

Preuves :

Cas 1 : si $4p^3+27q^2>0$

Il suffit d'appliquer les résultats du chapitre précédent : les solutions de (E1) $X^2+qX-p^3/27=0$ sont

$X_1=-q/2-(1/2)\sqrt{[(4p^3+27q^2)/27)]}$ et $X_2=-q/2+(1/2)\sqrt{[(4p^3+27q^2)/27)]}$

$X_1=-q/2-\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}$ et $X_2=-q/2+\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}$

dont le produit est évidemment $-p^3/27$.

X_1 et X_2 étant réels ils ont chacun une et une seule racine 3ième réelle notées $X_1^{1/3}$ et $X_2^{1/3}$

Or $X_1^{1/3}X_2^{1/3}=(X_1X_2)^{1/3}=(-p^3/27)^{1/3}=-p/3$ et donc on peut prendre pour u et v respectivement $X_1^{1/3}$ et $X_2^{1/3}$

Cas 2 : si $4p^3+27q^2=0$

tout a été dit dans l'encadré ; pour vérifier l'égalité $(-q/2)^{1/3}=3q/(2p)$ on élève au cube.

Cas 3 : si $4p^3+27q^2<0$, formules et méthode de Viète

Cette fois les solutions de (E1) sont imaginaires conjuguées :

$X_1=-q/2-\sqrt{[-(p/3)^3-(q/2)^2)]}i$ et $X_2=-q/2+\sqrt{[-(p/3)^3-(q/2)^2)]}i$

Et là le symbole $X_1^{1/3}$ ne peut désigner un seul nombre complexe : on est embêté...., d'autant plus que l'on sait que (E) admet 3 racines réelles (chapitre 1)!
En fait on peut prendre pour u une racine 3ième quelconque de X_1 et alors pour v, on prend le conjugué de u. Vérifions que l'on a bien avec ce choix, $uv=-p/3$.

> X_1 et X_2 étant conjugués v est une racine 3ième de X_2, et
> $(uv)^3=X_1X_2=-p^3/27$, mais uv est réel (c'est $|u|^2$)), tout comme $-p^3/27$, et on a bien $uv=-p/3$.

En fait dans le cas $4p^3+27q^2<0$, on préfère souvent utiliser la trigonométrie, ce que je vais faire, pour arriver aux formules de Viète.

Puisque $4p^3+27q^2<0$, on a $p<0$ et $(3q/(2p\sqrt{(-p/3)}))^2<1$: on pose $\cos\theta=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$ avec $\theta\in]0;\pi[$.

Donc $q/2=(p/3)\sqrt{(-p/3)}\cos\theta$, $q^2/4=-(p^3/27)(\cos\theta)^2$ et

$-(p/3)^3-(q/2)^2)=-(p/3)^3\ (1-(\cos\theta)^2)=(-p/3)^3\ (\sin\theta)^2$.

Comme $\sqrt{(-p/3)^3}=(-p/3)\sqrt{(-p/3)}$ et $\sqrt{(\sin\theta)^2}=\sin\theta$, car $\sin\theta>0$ on obtient

$X_1=-q/2+(p/3)\sqrt{(-p/3)}(\sin\theta)i=(-p/3)\sqrt{(-p/3)}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$X_2=-q/2-(p/3)\sqrt{(-p/3)}(\sin\theta)i=(-p/3)\sqrt{(-p/3)}(\cos\theta+i\sin\theta)$

soit en échangeant X_1 et X_2

$X_1=\sqrt{(-p/3)^3}\exp(i\theta)$ et $X_2=\sqrt{(-p/3)^3}\exp(-i\theta)$

En prenant $u=\sqrt{(-p/3)}\exp(i\theta/3)$ et $v=\sqrt{(-p/3)}\ \exp(-i\theta/3)$, on a bien $u^3=X_1$ et $v^3=X_2$ et $uv=-p/3$ et donc les solutions de (E) sont $u+v$, $ju+j^2v$, j^2u+jv. Comme u et v sont conjugués, ainsi que j et j^2, ces 3 solutions sont la somme de 2 nombres conjugués donc elles sont bien réelles.

Précisons (rappel : $j=\exp(i2\pi/3)$, $j^2=\exp(i4\pi/3)$) :

$u+v=\sqrt{(-p/3)}(\exp(i\theta/3)+\exp(-i\theta/3))=2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3)$

$ju+j^2v=\sqrt{(-p/3)}(\exp(i(\theta/3+2\pi/3))+\exp(i(-\theta/3+4\pi/3)))=\sqrt{(-p/3)}(\exp(i(\theta/3+2\pi/3))+\exp(i(-\theta/3-2\pi/3)))$

soit $ju+j^2v=2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3+2\pi/3)$

$j^2u+jv=\sqrt{(-p/3)}(\exp(i(\theta/3+4\pi/3))+\exp(i(-\theta/3+2\pi/3)))=\sqrt{(-p/3)}(\exp(i(\theta/3+4\pi/3))+\exp(i(-\theta/3-4\pi/3)))$

soit $j^2u+jv=2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3+4\pi/3)$.

Bien entendu la méthode "habituelle" pour trouver ces 3 solutions est celle de Viète :

on utilise l'identité $\cos3\alpha=4(\cos\alpha)^3-3\cos\alpha$ (pour tout réel α) et pour cela dans (E) on pose, pour k non nul, $x=k\cos(\alpha/3)$ et on obtient $(\cos(\alpha/3))^3+(p/k^2)\cos(\alpha/3)+q/k^3=0$: on choisit alors (rappel $p<0$) $k=2\sqrt{(-p/3)}$ et l'équation (E) s'écrit $(\cos(\alpha/3))^3-(3/4)\cos(\alpha/3)+q/k^3=0$ soit $\cos(\alpha)=-4q/k^3=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$.

Or $3q/(2p\sqrt{(-p/3)})\in]-1;1[$, puisque le carré de ce nombre est $27q^2/(-4p^3)$ qui est <1 car $27q^2<-4p^3$ et $p<0$; donc il existe un seul $\theta\in]0;\pi[$ tel que $\cos\theta=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$ et l'équation devient $\cos(\alpha)=\cos(\theta)$ donc $\alpha=\theta+2k\pi$ ou $\alpha=-\theta+2k\pi$ donc $x=k\cos((\theta+2k\pi)/3)$ pour k dans Z.

Le cercle trigonométrique montre clairement que cela ne donne que 3 possibilités pour x correspondantes à k=0,1,2 :

$2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3)$; $2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3+2\pi/3)$; $2\sqrt{(-p/3)}\cos(\theta/3+4\pi/3)$ qui sont bien celles trouvées ci-dessus.

Précisons la position relative de ces 3 solutions :

puisque $\theta\in]0;\pi[$ on a $0<\theta/3<\pi/3$, $2\pi/3<\theta/3+2\pi/3<\pi$, $4\pi/3<\theta/3+4\pi/3<5\pi/3$; or sur le cercle trigonométrique $\pi/3$ et $5\pi/3$ d'une part, $2\pi/3$ et $4\pi/3$ d'une autre part donnent des points symétriques par rapport à l'axe des abscisses et donc $\theta/3$, $\theta/3+2\pi/3$, $\theta/3+4\pi/3$ sont dans 3 secteurs circulaires (d'amplitude $\pi/3$) distincts : $\theta/3$ est dans celui le plus à gauche, $\theta/3+2\pi/3$ est dans celui le plus à droite d'où $\cos(\theta/3+2\pi/3)<\cos(\theta/3+4\pi/3)<\cos(\theta/3)$.

Notons aussi que puisque $\theta\in]0;\pi[$, les trois cosinus sont dans $]-1;1[$ et on retrouve le fait (voir chapitre 1) que les trois solutions sont dans $]-2\sqrt{(-p/3)};2\sqrt{(-p/3)}[$.

<u>cas 4</u> : $4p^3+27q^2>0$ et $p\neq 0$.

Il s'agit donc ici d'écrire sans le symbole racine 3ième la seule racine réelle de l'équation (E)

<u>si p<0, (donc q est non nul) q<0</u>

on fait un raisonnement analogue au précédent, mais cette fois on utilise l'identité $\mathrm{ch}3\alpha=4(\mathrm{ch}\alpha)^3-3\mathrm{ch}\alpha$ (pour tout réel α) et pour cela dans (E) on pose, pour k non nul, $\alpha>0$, $x=k\mathrm{ch}(\alpha/3)$ et on obtient $(\mathrm{ch}(\alpha/3))^3+(p/k^2)\mathrm{ch}(\alpha/3)+q/k^3=0$: on choisit alors $k=2\sqrt{(-p/3)}$ et l'équation (E) s'écrit $(\mathrm{ch}(\alpha/3))^3-(3/4)\mathrm{ch}(\alpha/3)+q/k^3=0$ soit $\mathrm{ch}(\alpha)=-4q/k^3=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$.

Or $3q/(2p\sqrt{(-p/3)})>1$, puisque ce nombre est positif et son carré est $27q^2/(-4p^3)$ qui est >1 car $27q^2>-4p^3$ et $p<0$; donc il existe un seul réel $\varphi>0$ tel que $\mathrm{ch}\varphi=3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$ et l'équation devient $\mathrm{ch}(\alpha)=\mathrm{ch}(\varphi)$ donc $\alpha=\varphi$ et $x=2\sqrt{(-p/3)}\mathrm{ch}(\varphi/3)$; bien entendu $\varphi=\mathrm{argch}(3q/(2p\sqrt{(-p/3)}))$.

<u>si p<0, q>0</u>

cette fois, c'est $-3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$ qui est supérieur à 1 et donc on prend $\varphi>0$ tel que $\mathrm{ch}\varphi=-3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$ et en posant x= $x=k\mathrm{ch}(\alpha/3)$ avec $k=-2\sqrt{(-p/3)}$ on arrive à $x=-2\sqrt{(-p/3)}\mathrm{ch}(\varphi/3)$; $\varphi=\mathrm{argch}(-3q/(2p\sqrt{(-p/3)}))$.

<u>si p>0</u>

cette fois on utilise l'identité $\mathrm{sh}3\alpha=4(\mathrm{sh}\alpha)^3+3\mathrm{sh}\alpha$ (pour tout réel α) et pour cela dans (E) on pose, pour k non nul, $\alpha>0$, $x=k\mathrm{sh}(\alpha/3)$ et on obtient $(\mathrm{sh}(\alpha/3))^3+(p/k^2)\mathrm{sh}(\alpha/3)+q/k^3=0$: on choisit alors $k=2\sqrt{(p/3)}$ et l'équation (E) s'écrit $(\mathrm{sh}(\alpha/3))^3+(3/4)\mathrm{sh}(\alpha/3)+q/k^3=0$ soit $\mathrm{sh}(\alpha)=-4q/k^3=-3q/(2p\sqrt{(p/3)})$.

Comme il existe toujours un seul réel φ tel que $\mathrm{sh}\varphi=-3q/(2p\sqrt{(p/3)})$, l'équation devient $\mathrm{sh}(\alpha)=\mathrm{sh}(\varphi)$ donc $\alpha=\varphi$ et $x=2\sqrt{(p/3)}\mathrm{sh}(\varphi/3)$; $\varphi=\mathrm{argsh}(-3q/(2p\sqrt{(p/3)}))$

Remarquons que changer q en -q dans l'équation (E) change uniquement les signes de ses solutions, et on peut vérifier que c'est bien ce qui se passe ici sur la seule solution réelle : pour $p<0$ lorsqu'on passe de $q<0$ à $q>0$ φ est inchangé et donc la solution réelle change simplement de signe, de même pour $p>0$ car alors changer q en -q change φ en $-\varphi$ puisque la fonction sh est impaire.

Bien sûr cette disparition des symboles racine 3ième dans ces formules de trigonométrie hyperbolique n'est qu'apparente.

Par exemple dans le dernier cas on a $x=2\sqrt{(p/3)}sh((argshX)/3)$ avec $X=-3q/(2p\sqrt{(p/3)})$. Or $shx=(exp(x)-exp(-x))/2$ et $argshx=ln(x+\sqrt{(1+x^2)})$, donc $2sh((argshx)/3)=(x+\sqrt{(1+x^2)})^{1/3}-(x+\sqrt{(1+x^2)})^{-1/3}$ et comme $(x+\sqrt{(1+x^2)})(x-\sqrt{(1+x^2)})=-1$ on a $2sh((argshx)/3)=(x+\sqrt{(1+x^2})^{1/3}+(x-\sqrt{(1+x^2})^{1/3}$ et..... je laisse le lecteur poursuivre les calculs (remplacer x par X) pour vérifier qu'on retouve la formule de Cardan ($u+v=X_1^{1/3}+X_2^{1/3}$)!!

preuve des formules de Cardan simplifiées

Soit a une racine réelle de l'équation (E) $x^3+px+q=0$ (il y en a toujours au moins une) ; par division euclidienne par x-a, et compte tenu que $a^3+pa+q=0$, on trouve que $x^3+px+q=(x-a)(x^2+ax+p+a^2)$ et donc les 2 autres solutions sont les solutions de $x^2+ax+p+a^2=0$ dont le discriminant est $\Delta=-3a^2-4p$:

si $4p^3+27q^2<0$ alors $a^2<-4p/3$ (voir chapitre 1) et donc $\Delta>0$ et les 2 autres solutions sont réelles : $-a/2\pm\sqrt{(-3a^2/4-p)}$

si $4p^3+27q^2>0$ alors $a^2>-4p/3$ (voir chapitre 1) et donc $\Delta<0$ et les 2 autres solutions sont imaginaires conjuguées : $-a/2\pm i\sqrt{(3a^2/4+p)}$.

Les solutions de (E) sont donc de la forme a, -a/2+ib, -a/2-ib avec a réel et

si $4p^3+27q^2>0$, $b=\sqrt{(3a^2/4+p)}=\sqrt{3}\sqrt{(a^2/4+p/3)}>0$ et $p=-3a^2/4+b^2$

si $4p^3+27q^2<0$, $b=ib'$ avec $b'=\sqrt{(-3a^2/4-p)}=\sqrt{3}\sqrt{(-a^2/4-p/3)}>0$ et $p=-3a^2/4+b^2=-3a^2/4-b'^2$

q étant l'opposé du produit des 3 solutions on a $q=-a(-a/2+ib)(-a/2-ib)=-a(a^2/4+b^2)$; on peut retrouver la valeur de p ci-dessus, soit en disant que p est la somme des produits 2 à 2 des solutions, c'est-à-dire $p=a(-a/2+ib-a/2-ib)+(-a/2+ib)(-a/2-ib)=-3a^2/4+b^2$, soit en identifiant x^3+px+q et $(x-a)(x+a/2-ib)(x+a/2+ib)$, ce qui permet aussi de retrouver q.

D'où $4p^3+27q^2=(81/4)a^4b^2+18a^2b^4+4b^6=b^2((9/2)a^2+2b^2)^2$, et $(p/3)^3+(q/2)^2=b^2((9/2)a^2+2b^2)^2/108$

<u>Simplification</u> de $(-q/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]})^{1/3}$ pour $\varepsilon=-1$ et 1, <u>dans le cas</u> $4p^3+27q^2>0$

$\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}=b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})$ et les deux solutions de l'équation X_1 et X_2 de (E1) $X^2+q-p^3/27=0$ sont

$X_1=-q/2+\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}=(a/2)(a^2/4+b^2)+ b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})$ soit

$X_1=a^3/8+(3/(4\sqrt{3}))a^2b+ab^2/2+b^3/(3\sqrt{3})=....=(a/2+b/\sqrt{3})^3$!!!!!

et de façon analogue $X_2=-q/2-\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}=(a/2-b/\sqrt{3})^3$.

Donc $u=(-q/2-\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]})^{1/3}=X_2^{1/3}=a/2-b/\sqrt{3}=a/2-\sqrt{(a^2/4+p/3)}$, et $v=(-q/2+\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]})^{1/3}=X_1^{1/3}=a/2+b/\sqrt{3}=a/2+\sqrt{(a^2/4+p/3)}$,

ce qui est bien le résultat annoncé ;

Puisque $u=a/2-b/\sqrt{3}$ et $v=a/2+b/\sqrt{3}$ (avec $uv=a^2/4-b^2/3=-p/3$) on retrouve, évidemment, que la seule solution réelle est $a=u+v$, les deux autres solutions étant $ju+j^2v=-a/2-ib$ et $j^2u+jv=-a/2+ib$.

De $\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}=b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})$ (voir plus haut), et compte-tenu que $p=-3a^2/4+b^2$ on tire $(9/2)a^2+2b^2=6a^2+2p$ et donc $6a^2+2p>0$ (en fait si $p>0$, c'est trivial et si $p\leq 0$ on a $-p/3\leq -4p/3$ et comme $a^2>-4p/3$ on a bien $6a^2+2p>0$) ; et puisque $b/\sqrt{3}=\sqrt{(a^2/4+p/3)}$ on obtient :

$\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}=(a^2+p/3)\sqrt{(a^2/4+p/3)}$.

Comme $a^2+p/3$ est non nul ($(p/3)^3+(q/2)^2$ étant non nul) on peut écrire

$\sqrt{(a^2/4+p/3)}=\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}/(a^2+p/3)$.

Donc, si p et a sont dans Q (donc q aussi, puisque $a^3+pa+q=0$), alors $1/(a^2+p/3)$ est un nombre rationnel et ainsi on prouve que u et v (cad $a/2\pm\sqrt{(a^2/4+p/3)}$) s'écrivent de la forme $\delta+/-\gamma\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}$, avec δ et γ rationnels, c'est-à-dire u et v sont (conjugués, à cause du + et -) dans $Q(\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)})$; mais $\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}=(1/6)\sqrt{((4p^3+27q^2)/3)}$ donc $Q(\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)})=Q(\sqrt{((4p^3+27q^2)/3)})$.

Et bien sûr le fait que u et v sont dans $Q(\sqrt{((4p^3+27q^2)/3)})$ se traduit par $-q/2+\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)}$ et $-q/2-\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)}$ sont des cubes dans $Q(\sqrt{((4p^3+27q^2)/3)})$.

Enfin, les racines de (E) étant a, $-a/2-ib$, $-a/2+ib$ et l'égalité $\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}=(a^2+p/3)\sqrt{(a^2/4+p/3)}$ s'écrivant $(1/6)\sqrt{((4p^3+27q^2)/3)}=(a^2+p/3)b/\sqrt{3}$, c'est que

$b=\sqrt{(4p^3+27q^2)}/(6(a^2+p/3))=\gamma\sqrt{(4p^3+27q^2)}$, avec γ rationnel, et donc ces racines sont bien dans $Q(i\sqrt{(4p^3+27q^2)})$

<u>Simplification</u> de $-q/2+\varepsilon i\sqrt{[-((p/3)^3+(q/2)^2))]}$ pour $\varepsilon=-1$ et 1, <u>dans le cas</u> $4p^3+27q^2<0$

On notera que cette fois l'expression $-q/2+\varepsilon i\sqrt{[-((p/3)^3+(q/2)^2))]}$ n'est pas à la puissance 1/3. C'est parceque cette expression n'est pas réelle et que la notation $z^{1/3}$ pour z non nul, complexe non réel n'a pas de sens précis : en effet z a alors trois racines 3ièmes non réelles, donc laquelle particulariser? Si z était réel il aurait une seule racine 3ième réelle et c'est elle que l'on noterait $z^{1/3}$.

Cependant certains auteurs "s'autorisent" une écriture du genre $[(1+(-7)^{1/4})^{1/3}+(-5)^{1/2}]^{1/12}$, laquelle définit en fait 288 nombres complexes! Je ne me l'autoriserai pas.

Cf le début de cette preuve de Cardan simplifié, puisque $4p^3+27q^2<0$ c'est que les trois racines de (E) sont réelles : a, $-a/2+ib$, $-a/2-ib$ avec $b=ib'$ avec $b'=\sqrt{3}\sqrt{(-a^2/4-p/3)}>0$.

Comme on a toujours $q=-a(a^2/4+b^2)$ et $p=-3a^2/4+b^2$ on a encore $(p/3)^3+(q/2)^2=b^2((9/2)a^2+2b^2)^2/108=-b'^2((9/2)a^2-2b'^2)^2/108$, dont l'opposé a pour racine carrée $b'|(9/2)a^2-2b'^2|/(6\sqrt{3})$.

Les deux solutions X_1 et X_2 de (E1) sont cette fois

X_1=–q/2+i√[-((p/3)^3+(q/2)^2))] et X_2–q/2-i√[-((p/3)^3+(q/2)^2))],

d'où X_1=(a/2)(a^2/4-b'^2)+ib'|(9/2)a^2-2b'^2|/(6√3), et selon le signe de l'expression qui est dans la valeur absolue on aura

soit X_1=(a/2+ib'/√3)^3 et X_2=(a/2-b'/√3)^3

soit X_1=(a/2-ib'/√3)^3 et X_2=(a/2+b'/√3)^3

Notons qu'en prenant u=a/2-ib'/√3 et v=a/2+ib'/√3 (on a bien uv=a^2/4-b^2/3=-p/3, puisque b'^2=-b^2) on retrouve les solutions de (E) : u+v=a, ju+j^2v=-a/2+b'=-a/2-ib et j^2u+jv=-a/2-b'=-a/2+ib.

Attention ici u^3 n'est pas forcément X_2, mais {u^3;v^3}={X_1;X_2}.

Enfin, de √[-((p/3)^3+(q/2)^2))]=b'|(9/2)a^2-2b'^2|/(6√3) et p=-3a^2/4+b^2= -3a^2/4-b'^2, on obtient (9/2) a^2-2b'^2=(9/2)a^2+(3/2)a^2+2p=6a^2+2p, d'où √[-((p/3)^3+(q/2)^2))]=b'|a^2+p/3|/√3 ;

(soit aussi √[-((p/3)^3+(q/2)^2))]=|a^2+p/3|√(-a^2/4-p/3)).

Donc si a, p, q sont rationnels, b'/√3=√(-a^2/4-p/3)∊Q(√[-((p/3)^3+(q/2)^2))])=Q(√[-(4p^3+27q^2)/3]) et u et v sont dans Q(i√[-(4p^3+27q^2)/3]) ; donc X_1 et X_2 sont des cubes dans Q(i√[-(4p^3+27q^2)/3]), c'est-à-dire –q/2+iε√[-((p/3)^3+(q/2)^2))], pour ε=1 et -1, sont des cubes dans Q(i√[-(4p^3+27q^2)/3]).

Mais on peut aussi dire que b'∊Q(√[-(4p^3+27q^2)]) et donc les racines de (E) sont dans Q(√[-(4p^3+27q^2)]).

<u>Remarque 1</u>

Les résultat ci-dessus sont bien vrais si a=0, donc q=0.

si p>0 les racines sont 0,-i√p,i√p qui sont bien dans Q(i√(4p^3+27q^2))=Q(2ip√p)=Q(i√p), car p est rationnel

si p<0 les racines sont 0,-√(-p),√(-p) qui sont bien dans Q(√[-(4p^3+27q^2)])=Q(2p√(-p))=Q(√(-p)), car p est rationnel.

<u>Remarque 2</u>

Evidemment les formules donnant les deux autres solutions à partir de la connaissance d'une solution réelle a n'ont d'intérêt pratique que si on connaît effectivement la valeur exacte d'une solution réelle! Cependant on pourrait se dire, puisque ces solutions sont a, -a/2+ib,-a/2-ib et que p=b^2-(3/4)a^2 et q=-a(a^2/4+b^2), il suffit de résoudre en a et b ce systéme de deux équations, mais en éliminant b entre ces 2 équations on trouve a^3+pa+q=0 et on n'est pas plus avancé!!

Mais si jamais on connaît une solution réelle (avec.... une bonne vue par exemple ou voir plus loin un moyen d'obtenir une solution rationnelle éventuelle) on a tout de suite les 2 autres! (même pas besoin de faire la division euclidienne par x-a et de se ramener à un second degré).

Preuve de la magnifique formule

Pour se ramener exactement aux calculs précédents, on peut supposer b>0, puisque changer b en -b ne change pas le membre de gauche.

a, -a/2-ib/2 et -a/2+ib/2 sont alors solutions de $x^3+px+q=0$ avec $p=-3a^2/4+b^2$ et $q=-a(a^2/4+b^2)$ et donc $4p^3+27q^2=b^2((9/2)a^2+2b^2)^2/108>0$ (voir calculs précedents).

a étant la seule solution réelle de $x^3+px+q=0$, $a= (-q/2+\sqrt{}[(p/3)^3+(q/2)^2)])^{1/3}+(-q/2-\sqrt{}[(p/3)^3+(q/2)^2)])^{1/3}$ et on remplace p et q en fonction de a et b.

Bien entendu on peut faire une démonstration directe : il est "évident" que sous les puissances 1/3 on a en fait $(a/2\pm b/\sqrt{3})^3$.

Chapitre 5

Exemples de résolution dans C de l'équation (E) $x^3+px+q=0$ avec p et q réels

/

1ère série d'exemples avec la méthode Hudde-Cardan (d'abord des $4p^3+27q^2>0$, puis des $4p^3+27q^2<0$)			
Equation (E)	Equation (E1) et ses 2 solutions	u et v (avec uv=-p/3)	les 3 solutions de (E) x_1, x_2, x_3
n°1 $x^3+(b^2-(3/4)a^2)x-a(a^2/4+b^2)=0$ (a, b réels, b non nul)	$X^2-a(a^2/4+b^2)X-(b^2-(3/4)a^2)^3/27=0$ $(a/2+b/\sqrt{(3)})^3$ $(a/2-b/\sqrt{(3)})^3$	$a/2+b/\sqrt{(3)}$ $a/2-b/\sqrt{(3)}$	$x_1=a$ $x_2=-a/2+ib$ $x_3=-a/2-ib$
n°2 $x^3-3abx-a^3-b^3=0$ (a, b complexes, a^3 et b^3 distincts)	$X^2-(a^3+b^3)X+a^3b^3=0$ a^3 b^3	a b	$x_1=a+b$ $x_2=ja+j^2b$ $x_3=j^2a+jb$
n°3 $x^3+x-2=0$	$X^2-2X-1/27=0$ $1+(2/3)\sqrt{(7/3)}$ $1-(2/3)\sqrt{(7/3)}$	$(1+(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}$ $(1-(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}$	$x_1=u+v$ $x_2=-(u+v)/2+(\sqrt{3}/2)(u-v)i$ $x_3=-(u+v)/2-(\sqrt{3}/2)(u-v)i$ ces solutions se simplifient énormément ; do you see ?
n°4 $x^3-46x-144=0$	$X^2-144X+97336/27=0$ $72+(146/3)\sqrt{(2/3)}$ $72-(146/3)\sqrt{(2/3)}$	$(72+(146/3)\sqrt{(2/3)})^{1/3}$ $(72-(146/3)\sqrt{(2/3)})^{1/3}$	$x_1=u+v$ $x_2=-(u+v)/2+(\sqrt{3}/2)(u-v)i$ $x_3=-(u+v)/2-(\sqrt{3}/2)(u-v)i$

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>ces solutions se simplifient énormément ; do you see ?</td></tr>
<tr><td>n°5
$x^3+3x-2=0$</td><td>$X^2-2X-1=0$
$1+\sqrt{2}$
$1-\sqrt{2}$</td><td>$(1+\sqrt{2})^{1/3}$
$(1-\sqrt{2})^{1/3}$</td><td>$x_1=(1+\sqrt{2})^{1/3}+(1-\sqrt{2})^{1/3}$
$Re(x_2)=-((1+\sqrt{2})^{1/3}+(1-\sqrt{2})^{1/3})/2$
$Im(x_2)=(\sqrt{3}/2)((1+\sqrt{2})^{1/3}-(1-\sqrt{2})^{1/3})$
x_3=conjugué de x_2</td></tr>
<tr><td>n°6
$x^3-15x-4=0$
celle de Bombelli</td><td>$X^2-4X+25=0$
$2-11i$
$2+11i$</td><td>$2+i$
$2-i$</td><td>$x_1=4$
$x_2=-2+\sqrt{3}$
$x_3=-2-\sqrt{3}$</td></tr>
<tr><td>n°7
$x^3-3x-1=0$</td><td>$X^2-X+1=0$
$\exp(i\pi/3)=-j$
$\exp(-i\pi/3)=-j^2$</td><td>$\exp(i\pi/9)$
$\exp(-i\pi/9)$</td><td>$x_1=2\cos(\pi/9)$
$x_2=2\cos(7\pi/9)$
$x_3=2\cos(5\pi/9)$</td></tr>
<tr><td>n°8
$x^3-7x+6=0$</td><td>$X^2+6X+343/27=0$
$-3+(10\sqrt{3}/9)i$
$-3-(10\sqrt{3}/9)i$</td><td>$1+2i/\sqrt{3}$
$1-2i/\sqrt{3}$</td><td>$x_1=2$
$x_2=-3$
$x_3=1$</td></tr>
<tr><td colspan="4">On termine maintenant par trois exercices sur la simplification de la somme de deux puissances 3ièmes.</td></tr>
<tr><td>n°9</td><td colspan="3"><u>Exercice</u> :
b et c étant 2 nombres rationnels avec $c>0$, $b\neq0$, trouver une méthode pour savoir si $(b+\sqrt{c})^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{1/3}$ est rationnel ou pas, et si oui, comment déterminer ce rationnel.

<u>Remarque</u> :
si $b=0$, $(b+\sqrt{c})^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{1/3}=0$ est toujours rationnel, même si c n'est pas rationnel ;
et si $c=0$, $(b+\sqrt{c})^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{1/3}=2b^{1/3}$ sera rationnel si et seulement si b est le cube d'un rationnel.</td></tr>
<tr><td>n°10</td><td colspan="3"><u>Exercice</u> :
b et c sont deux réels avec $c>0$.
Soit $z_1=\alpha+i\beta$ (α et β sont réels) une racine 3ième de $b+i\sqrt{c}$ et z_2 le conjugué de z_1 : donc z_2 est une racine 3ième de $b-i\sqrt{c}$.
On pose $a=z_1+z_2$, $a'=jz_1+j^2z_2$, $a''=j^2z_1+jz_2$.
1) Montrer que $z_1z_2=(b^2+c)^{1/3}$ (racine 3ième réelle de b^2+c).</td></tr>
</table>

	2) Calculer a, a', a'' en fonction de α et β Montrer que a, a' ,a '' sont distincts 2 à 2. Montrer que l'ensemble {a ; a' ; a''} ne dépend pas du choix de z_1 comme racine 3ième de $b+i\sqrt{c}$. Préciser {a ; a' ; a''} en fonction de c lorsque b=0. **On suppose maintenant b et c rationnels et $b\neq 0$**. 3) Trouver une méthode pour avoir si un des nombres a ou a' ou a'' est rationnel. 4) Appliquer cette méthode aux deux cas suivants : cas 1 : b=35/216 c=1/48 cas 2 : b=-2 c=4 Dans chacun de ces deux cas, on déterminera ensuite les racines 3ièmes de $b+i\sqrt{c}$ (voir Remarque du chapitre 2).
n°11	Exercice : Montrer, en utilisant l'équation $x^3+(r-1)x-r=0$, que pour tout réel $r\geq 1/4$ on a : $3^{1/2}=A^{1/3}+B^{1/3}$, avec $A=(3\times 3^{1/2}r-(r+2)(4r-1)^{1/2})/2$ et $B=(3\times 3^{1/2}r+(r+2)(4r-1)^{1/2})/2$, et que, r étant toujours $\geq 1/4$, on a $(r+2)(4r-1)^{1/2}\geq 3\times 3^{1/2}r \Leftrightarrow r\geq 1$. Que donnent les cas r=1/4, r=1, r=2?

Commentaires sur l'équation n°1

$4p^3+27q^2=(81/4)a^4b^2+18a^2b^4+4b^6=b^2((9/2)a^2+2b^2)^2$, d'où

$(p/3)^3+(q/2)^2=b^2((9/2)a^2+2b^2)^2/108\geq 0$

Comme $b\neq 0$, $(p/3)^3+(q/2)^2>0$, l'équation (E) n°1 a une solution réelle et deux imaginaires conjuguées.

De $\sqrt{((p/3)^3+(q/2)^2)}=b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})$ on déduit que les solutions de (E1) sont

$X_1=-q/2+\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2)]}=(a/2)(a^2/4+b^2)+ b((9/2)a^2+2b^2)/(6\sqrt{3})$ soit

$X_1=a^3/8+(3/(4\sqrt{3}))a^2b+ab^2/2+b^3/(3\sqrt{3})=....=(a/2+b/\sqrt{3})^3$!!!!!

et de façon analogue $X_2=(a/2-b/\sqrt{3})^3$.

On peut alors prendre $u=a/2+b/\sqrt{3}$ et $v=a/2-b/\sqrt{3}$ (on a bien $uv=a^2/4-b^23=-p/3$) et les solutions de (E) sont

$u+v=a$, $ju+j^2v= -(u+v)/2+(\sqrt{3}/2)(u-v)i=-a/2+ib$, $j^2u+jv=-(u+v)/2-(\sqrt{3}/2)(u-v)i=-a/2-ib$.

Remarque 1 si b=0, $4p^3+27q^2=0$, donc

- soit a=0 et p=q=0 et 0 est solution triple
- soit $a\neq 0$ et alors q et donc p sont aussi non nuls et il y a 2 solutions distinctes $3q/p=a$ (simple) et $-3q/(2p)=-a/2$ (double)

Remarque 2 : même si a et b sont des nombres complexes quelconques, l'équation n°1 a encore comme solutions a, $-a/2+ib$ et $-a/2-ib$, ne serait-ce que parce que le développement de $(x-a)(x-a/2-ib)(x-a/2+ib)$ va toujours donner x^3+px+q avec $p=b^2-(3/4)a^2$ et $q=-a(a^2/4+b^2)$.

Remarque 3 : en fait les calculs ci-dessus sont presque une redite de ceux faits à la fin du chapitre 4 pour la preuve des simplifications des formules de Cardan, mais c'était pour le cas où le lecteur.... aurait trouvé la fin de ce chapitre 4 trop indigeste!!

Commentaire sur l'équation n°2

$4p^3+27q^2=27(a^3-b^3)^2$, donc différent de 0 (cf l'hypothèse a^3 et b^3 sont distincts) et il y a trois solutions distinctes.
(E1) est $X^2-(a^3+b^3)X+a^3b^3=0$, dont les solutions sont évidemment a^3 et b^3, et on peut prendre u=a, v=b puisque par ailleurs $uv=3ab/3=-p/3$. Ce qui donne les 3 solutions $a+b$, $ja+j^2b$, j^2a+jb.

Remarque 1 : le produit des trois racines étant -q, $\mathbf{a^3+b^3=(a+b)(ja+j^2b)(j^2a+jb)}$, cela pour a^3 et b^3 distincts (cf hypothèse), mais un simple développement montre que cette relation est vraie pour tout a et tout b dans C.
On retrouve alors l'identité $\mathbf{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$, pour tout a et tout b dans C.
En fait, puisque les racines de $x^3+1=0$ sont évidemment -1, $-j$, $-j^2$, on a pour tout x dans C, $x^3+1=(x+1)(x+j)(x+j^2)$, et en remplacant x par a/b, a et b quelconques dans C, b non nul, et en multipliant par b des deux côtés, on obtient aussi
$a^3+b^3=(a+b)(ja+j^2b)(j^2a+jb)$, pour tout a et tout b dans C (pour b=0 on fait une vérification directe).

Enfin, puisque les racines de $x^3-3abx-a^3-b^3=0$ sont $a+b$, $ja+j^2b$, j^2a+jb, on a pour tout x dans C, $x^3-3abx-a^3-b^3=(x-a-b)(x-ja-j^2b)(x-j^2a-jb)$.
En posant alors u=x, v=-a, w=-b, on obtient l'identité

$\mathbf{u^3+v^3+w^3-3uvw=(u+v+w)(u+jv+j^2w)(u+j^2v+jw)}$, pour tous nombres complexes u,v,w

(en toute rigueur pour v^3 et w^3 distincts, puisque au départ on a supposé $a^3\neq b^3$, mais il est facile de vérifier que cette identité est toujours vraie, cela même si v=w ou v=jw ou $v=j^2w$).

Remarque 2 : si $a^3=b^3$, alors $4p^3+27q^2=0$

- soit a ou b=0 et 0 est solution triple
- soit a et b sont non nuls et il y a 2 solutions distinctes $3q/p=2a$ (simple) et $-3q/(2p)=-a$ double

Remarque 3 : bien entendu on peut résoudre (E) sans Cardan :

$x^3-3abx-a^3-b^3=x^3-(a+b)^3-3ab(x-(a+b))=(x-(a+b))(x^2+(a+b)x+(a+b)^2)-3ab(x-(a+b))$, et finalement $x^3-3abx-a^3-b^3=(x-(a+b))(x^2+(a+b)x+a^2-ab+b^2)$.
Comme le facteur du second degré a pour discriminant $-3(a-b)^2$, ce facteur a pour racines $-(a+b)+/-(a-b)\sqrt{(3)}i$, soient $ja+j^2b$ et j^2a+jb.

Remarque 4 : on peut retrouver alors les formules de Cardan pour résoudre $x^3+px+q=0$.
En effet, s'il existe a et b tels que $p=-3ab$ et $q=-a^3-b^3$, les solutions seront $a+b$, $ja+j^2b$, j^2a+jb.
Or $p=-3ab$ et $q=-a^3-b^3$ entraînent que $a^3b^3=-p^3/27$ et $a^3+b^3=-q$ et donc a^3 et b^3 sont les racines de $X^2+qX-p^3/27=0$, qui n'est autre que (E1)!

Commentaire sur les équations n°3 et n°4

Il n'aura échappé à personne que ces 2 équations admettent chacune une solution réelle très simple : 1 et 8 respectivement!

$x^3+x-2=0$ ayant pour seule solution réelle $u+v=(1+(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}+(1-(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}$ et 1 étant effectivement solution de l'équation, c'est que $1=(1+(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}+(1-(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}$ égalité qui ne saute pas aux yeux ; pour ceux se posant la question de savoir si cette égalité peut se prouver sans faire appel à une équation du 3ième degré, voir la fin du commentaire.

En utilisant alors l'aspect simplification des formules de Cardan, puisque on a une solution réelle a=1 sous la main, on voit tout de suite que les deux autres solutions sont $-a/2\pm i\sqrt{(3a^2/4+p)}$, soit $-1/2+i\sqrt{7}/2$ et $-1/2-i\sqrt{7}/2$; comme manifestement $u>v$ c'est que $x_1=1$, $x_2=-1/2+i\sqrt{7}/2$ et $x_3=-1/2-i\sqrt{7}/2$.

Mais, toujours d'après l'aspect simplification, on a $(-q/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2]})=(a/2+\varepsilon\sqrt{(a^2/4+p/3)})^3$, ce qui donne $(1+\varepsilon(2/3)\sqrt{(7/3)})=(1/2+\varepsilon(1/2)\sqrt{(7/3)})^3$ et donc $1+(2/3)\sqrt{(7/3)}$ et $1-(2/3)\sqrt{(7/3)}$ sont des cubes, ce qui explique que leurs puissances 1/3 se simplifient considérablement : $u=1/2+(1/2)\sqrt{(7/3)}$ et $v=1/2-(1/2)\sqrt{(7/3)}$ ce qui redonne $x_1=1$, $x_2=-1/2+i\sqrt{7}/2$ et $x_3=-1/2-i\sqrt{7}/2$.

On vérifie d'ailleurs que toutes les solutions 1, $-1/2+i\sqrt{7}/2$, $-1/2-i\sqrt{7}/2$sont dans $Q(i\sqrt{[4p^3+27q^2]})$ (voir simplification des formules de Cardan), puisque$\sqrt{[4p^3+27q^2]}=\sqrt{112}=4\sqrt{7}$ et $Q(i\sqrt{[4p^3+27q^2]})=Q(i\sqrt{7})$

De même pour l'équation $x^3-46x-144=0$ qui a pour solution réelle a=8, on a donc $8=(72+(146/3)\sqrt{(2/3)})^{1/3}+(72-(146/3)\sqrt{(2/3)})^{1/3}$, et les 2 autres solutions sont $-a/2\pm i\sqrt{(3a^2/4+p)}$ soient $-4+i\sqrt{2}$ et $-4-i\sqrt{2}$ et donc $x_1=8$, $x_2=-4+i\sqrt{2}$ et $x_3=-4-i\sqrt{2}$.

Et toujours d'après $(-q/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2]})=(a/2+\varepsilon\sqrt{(a^2/4+p/3)})^3$, on a $72+(146/3)\sqrt{(2/3)}=(4+\sqrt{(2/3)})^3$ et $72-(146/3)\sqrt{(2/3)}=(4-\sqrt{(2/3)})^3$ et donc u et v se simplifient aussi considèrablement : $u=4+\sqrt{(2/3)}$ et $v=4-\sqrt{(2/3)}$.

Là aussi on peut vérifier que toutes les solutions 8, $-4+i\sqrt{2}$, $-4-i\sqrt{2}$ sont dans $Q(i\sqrt{[4p^3+27q^2]})$, puisque$\sqrt{[4p^3+27q^2]}=292\sqrt{2}$ et $Q(i\sqrt{[4p^3+27q^2]})=Q(i\sqrt{2})$

On peut se poser alors la question suivante : est-ce qu'il y a un moyen de prouver les égalités

$(1+(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}+(1-(2/3)\sqrt{(7/3)})^{1/3}=1$ et $(72+(146/3)\sqrt{(2/3)})^{1/3}+(72-(146/3)\sqrt{(2/3)})^{1/3}=8$,

cela "directement", c'est-à-dire sans utiliser le fait que chaque membre de gauche est la seule racine réelle d'une équation du 3ième degré?

Je ne le pense pas ; en tout cas je ne connais pas une telle méthode...ce qui ne veut pas dire en toute rigueur qu'elle n'existe pas!

Voir l'exemple n°8 proposant une méthode pour savoir si $(b+\sqrt{c})^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{1/3}$ est rationnel ou pas, b et c étant rationnels, méthode qui utilise une équation du 3ième degré.

En conclusion, pour une équation du 3ième degré à coefficients rationnels, avant d'appliquer brutalement les formules de Cardan, il vaut mieux chercher à voir tout de suite si cette équation admet une solution rationnelle, ce qui est assez facile à voir, et si oui on utilise alors les formules de Cardan simplifiées ou la division euclidienne : voir le conseil pratique ci-dessous :

Conseil pratique

Pour résoudre une équation du 3ième degré $x^3+px+q=0$ avec p et q rationnels, la 1ère chose à faire est de chercher d'éventuelles solutions rationnelles ; l'équation va s'écrire $ex^3+fx+g=0$ (avec e,f,g entiers relatifs) et pour que c/d (c,d entiers relatifs, d>0, c et d 1er entre eux) soit solution il est nécessaire que c divise g et d divise e (voir fin de cet encadré) : on passe donc en revue tous les cas possibles.

On voit tout de suite que si p et q sont des entiers relatifs (cas de tous les exemples ci-dessus) on aura e=1, f=p, g=q et donc d doit diviser 1, soit d=1 et c doit diviser q : **les solutions rationnelles éventuelles de $x^3+px+q=0$ ne peuvent qu'être entières et doivent diviser q.**

Dans le cas $4p^3+27q^2>0$, comme il y a une seule solution réelle il y a au plus une solution rationnelle, donc dès que l'on en a trouvé une on peut arrêter et on applique les formules de Cardan "simplifiées" (voir chapitre 4) ou on fait la division euclidienne par x-a pour se ramener à un 2ième degré.

Par contre dans le cas $4p^3+27q^2<0$ on peut avoir plusieurs solutions rationnelles (exemple : $x^3-7x+6=0$ a 3 solutions rationnelles 1,2,-3) : si on en trouve deux, on a tout de suite la 3ième qui sera rationnelle, puisque la somme des 3 solutions est 0 ; si on en trouve qu'une on fait comme ci-dessus.

Si $4p^3+27q^2=0$, et $p\neq0$, les solutions sont connues : 3q/p et -3q/2p et elles sont évidemment rationnelles, p et q l'étant. En fait p et q étant rationnels on aura effectivement $4p^3+27q^2=0$ si et seulement si -3p est un carré dans Q (puisque$-3p=(9q/(2p))^2$)

Si on ne trouve pas de solution "évidente" il faut se "résoudre" à utiliser Hudde et Cardan ou si $4p^3+27q^2<0$ utiliser les formules de Viète (voir des exemples plus loin).

Justification que c divise g et d divise e : c/d solution de $ex^3+fx+g=0$ signifie que $ec^3+fcd^2+gd^3=0$ et donc c divise $-(ec^3+fcd^2)=gd^3$, mais c étant 1er avec d, il est aussi 1er avec d^3 et donc, d'après le théorème de Gauss, c divise g ; raisonnement analogue pour d divise e.

Commentaire sur l'équations n°5

Elle n'a pas de solution rationnelle, donc là on n'a pas trop le choix : on se lance dans Hudde-Cardan

Commentaire sur l'équations n°6

Cette fois $4p^3+27q^2<0$, donc 3 solutions réelles : or la recherche de solution rationnelle, donc forcément entière ici, conduit à essayer les diviseurs de -4 et 4 est effectivement solution entière!

Donc soit on fait la division euclidienne de $x^3-15x-4$ par $x-4$ ce qui donne la factorisation $(x-4)(x^2+4x+1)$ et il ne reste plus qu'à résoudre l'équation $x^2+4x+1=0$, soit on applique les formules simplifiées du chapitre 4.

Cet exemple est historique : en effet l'équation (E1) n'a pas de solutions réelles alors que (E) a 3 solutions réelles! Cet aspect a intrigué le mathématicien italien Bombelli Rafaele (1526-1573 Bologne) et c'est à cette occasion qu'il a été le premier à utiliser les nombres complexes : il a imaginé i tel que $i^2=-1$ pour dire que les solutions de (E1) étaient $2-11i$ et $2+11i$; mais ensuite il fallait résoudre $u^3=2-11i$!! Ce qui n'est pas évident : on cherche u sous la forme $a+ib$ avec a et b entiers, voir remarque en fin de chapitre 2.

On vérifie là aussi, que toutes les solutions $4, -2+\sqrt{3}, -2-\sqrt{3}$ sont dans $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})$ (voir simplification des formules de Cardan), puisque$\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]}=\sqrt{13068}=66\sqrt{3}$ et $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})=Q(\sqrt{3})$.

Commentaire sur l'équations n°7

La encore $4p^3+27q^2<0$, donc 3 solutions réelles, mais il n'y a pas de solutions rationnelle : aucun diviseur de -1 (soit -1 et 1) ne convient ; mais la méthode Hudde Cardan fonctionne sans problème.

Notons que puisque l'équation n'a pas de solutions rationnelles, c'est que $\cos(\pi/9)$, $\cos(7\pi/9)$, $\cos(5\pi/9)$ sont irrationnels et même $\sin(\pi/18)=\sin(5\pi/9-\pi/2)=-\cos(5\pi/9)$.

Commentaire sur l'équations n°8

Evidemment "la" méthode consiste d'abord à chercher s'il y a des solutions rationnelles, vu que p et q sont rationnels (voir l'encadré conseil pratique!), et ....on aurait tout de suite trouvé les solutions -3,1,2.

Mais le but est de voir ce que donne Hudde.

Si les deux solutions de (E1) ne posent pas de problème, pour trouver u et v, c'est une autre paire de manches.

En fait il faut résoudre $u^3=-3+(10\sqrt{3}/9)i$ et $v^3=-3-(10\sqrt{3}/9)i$ avec $uv=-p/3=7/3$.

Posons $u=a+ib$ avec a et b réels, donc $a^3-3ab^2=-3$ et $3a^2b-b^3=10\sqrt{3}/9$; rajoutons la condition correspondant à l'égalité des modules : $|a+ib|^3=|-3+(10\sqrt{3}/9)i|$ et en élevant au carré on obtient $(a^2+b^2)^3=343/27=(7/3)^3$, soit $a^2+b^2=7/3$.

En reportant dans la 1ière condition on obtient $4a^3-7a+3=0$ et on se retrouve avec une équation du 3ième degré ; on voit que a=1 est solution (je sais, c'est de la ""triche" car quitte à "deviner" les solutions de cette équation autant le faire pour l'équation initiale), ce qui donne $b^2=4/3$ et on peut prendre $b=2/\sqrt{3}$ et vérifier que $u=1+2i/\sqrt{3}$ convient ; de même $v=1-2i/\sqrt{3}$ convient et comme $uv=7/3=-p/3$, les 3 solutions sont

$u+v=2$, $ju+j^2v= -(u+v)/2+(\sqrt{3}/2)(u-v)i=-1-2=-3$, $j^2u+jv=-(u+v)/2-(\sqrt{3}/2)(u-v)i=-1+2=1$.

On vérifie là aussi, que toutes les solutions -3, 2, 1 sont dans $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})$ (voir simplification des formules de Cardan), puisque $\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]}=\sqrt{400}=20$ et $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})=Q$.

Solution de l'exercice n°9

Posons $a=(b+\sqrt{c})^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{1/3}$: il est naturel d'essayer d'élever au cube et on trouve tout de suite que $a^3=2b+3(b^2-c)^{1/3}a$ et donc, a étant non nul (car b est non nul), $(b^2-c)^{1/3}=(a^3-2b)/(3a)$.

Et donc on a tout de suite le fait que pour que a soit rationnel il est nécessaire que b^2-c soit un cube dans Q.

Cette condition étant remplie, définissons les nombres rationnels p et q par $(c-b^2)^{1/3}=p/3$ et $q=-2b$: alors a est solution de l'équation (E) $x^3+px+q=0$.

Comme $4p^3+27q^2=4\times27(c-b^2)+27\times4b^2=4\times27c>0$, cette équation a une seule solution réelle...qui bien sûr est a.

Et, d'après l'aspect simplification des formules de Cardan : $(-q/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2]})^{1/3}=a/2+\varepsilon\sqrt{[(p/3)^3+(q/2)^2]}/(a^2+p/3)$, on obtient $(b+\varepsilon\sqrt{c})^{1/3}=a/2+\varepsilon\sqrt{c}/(a^2+(c-b^2)^{1/3})$; voir la remarque ci-dessous pour une une preuve directe de ce résultat, c'est-à-dire sans passer par les formules simplifiées de Cardan.

D'où la méthode suivante pour savoir si $a=(b+\sqrt{c})^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{1/3}$ est dans Q ou pas et si oui, comment déterminer sa valeur (avec b et c dans Q, b non nul, c>0) :

1) $c-b^2$ doit être un cube dans Q

2) l'équation $x^3+px+q=0$ avec $p=3(c-b^2)^{1/3}$ et $q=-2b$, qui a pour seule solution réelle a, doit avoir une solution rationnelle (qui sera a) : voir l'encadré Conseil pratique ci-dessus pour voir comment répondre à cette question.

3) on a le résultat supplémentaire : $(b+\varepsilon\sqrt{c})^{1/3}=a/2+\varepsilon\sqrt{c}/(a^2+(c-b^2)^{1/3})$.

Exemple :

a$=(18+\sqrt{325})^{1/3}+(18-\sqrt{325})^{1/3}$: b=18 et c=325.

On a $c-b^2=1$ qui est un cube dans Q, donc on poursuit :

p=3 et q=-36 : il faut voir si l'équation $x^3+3x-36=0$ a une solution rationnelle ; cette solution rationnelle ne peut qu'être entière et diviser 36.

Les diviseurs (>0 et<0) de 36 sont au nombre de 24 : on les passe en revue pour savoir s'il y en a un qui est solution de l'équation. Coup de chance 3 est effectivement solution, donc a est rationnel et **a=3**, soit $(18+\sqrt{325})^{1/3}+(18-\sqrt{325})^{1/3}=3$.

De plus : $(18+\varepsilon\sqrt{325})^{1/3}=3/2+\varepsilon\sqrt{325}/(3^2+(1)^{1/3})=3/2+\varepsilon\sqrt{325}/10$ ou $(18+\varepsilon5\sqrt{13})^{1/3}=(1/2)(3+\varepsilon\sqrt{13})$.

<u>Autre exemple</u>:

$\mathbf{a}=(20+14\sqrt{2})^{1/3}+(20-14\sqrt{2})^{1/3}$

On a $c-b^2=196\times2-20^2=-8$ qui est un cube dans Q,

$p=-6$, $q=-40$, $x^3-6x-40=0$ a pour seule solution rationnelle 4, donc $\mathbf{a=4}$.

<u>Remarque</u> : preuve directe de $(b+\varepsilon\sqrt{c})^{1/3}=a/2+\varepsilon\sqrt{c}/(a^2+(c-b^2)^{1/3})$.

Supposons $\varepsilon=1$; il faut montrer que $g=a^3+a(c-b^2)^{1/3}+2\sqrt{c}$ et $d= 2(b+\sqrt{c})^{1/3}a^2+2(b+\sqrt{c})^{1/3}(c-b^2)^{1/3}$ sont égaux.

De $a^3=2b+3(b^2-c)^{1/3}a$ on tire $g=2b+2\sqrt{c} +2(b^2-c)^{1/3}a$

et de $a^2=(b+\sqrt{c})^{2/3}+2(b^2-c)^{1/3}+(b-\sqrt{c})^{2/3}$ on tire

$d=2(b+\sqrt{c})+4(b+\sqrt{c})^{1/3}(b^2-c)^{1/3}+2(b+\sqrt{c})^{1/3}(b-\sqrt{c})^{2/3}+2(b+\sqrt{c})^{1/3}(c-b^2)^{1/3}$

et $g-d=2(b^2-c)^{1/3}(a-(b+\sqrt{c})^{1/3}-(b-\sqrt{c})^{1/3})=0$.

<u>Solution de l'exercice n°10</u>

1) $z_1^3=b+i\sqrt{c}$, et en passant au module, $|z_1|^3=\sqrt{(b^2+c)}$; d'où $z_1z_2=|z_1|^2=(b^2+c)^{1/3}$.

2) $a=2\alpha$, $a'=-\alpha-\beta\sqrt{3}$, $a''=-\alpha+\beta\sqrt{3}$

$z_1=b+i\sqrt{c}$ entraîne que $(3\alpha^2-\beta^2)\beta=\sqrt{c}$. D'où

si $a=a'$ alors $3\alpha=-\beta\sqrt{3}$, soit $\beta=-\sqrt{3}\alpha$ et $(3\alpha^2-\beta^2)\beta=0\neq\sqrt{c}$.
si $a=a''$ alors $3\alpha=\beta\sqrt{3}$, soit $\beta=\sqrt{3}\alpha$ et $(3\alpha^2-\beta^2)\beta=0\neq\sqrt{c}$.
si $a'=a''$ alors $\beta=0$ et $(3\alpha^2-\beta^2)\beta=0\neq\sqrt{c}$.

Remplacer z_1 par une autre racine 3ième de $b+i\sqrt{c}$, c'est remplacer z_1 par jz_1, et donc z_2 devient j^2z_2 (puisque j et j^2 sont conjugués) ou remplacer z_1 par j^2z_1, et donc z_2 devient jz_2 : dans le 1er cas, a devient a', a' devient a'', a'' devient a et dans le 2ième cas a devient a'', a' devient a, a'' devient a' et dans les deux cas {a ; a' ; a''} est inchangé.

si b=0, une racine 3ième de $i=\exp(i\pi/2)$ étant $\exp(i\pi/6)$, on peut prendre $z_1=c^{1/6}\exp(i\pi/6)$, soit $\alpha=c^{1/6}\sqrt{3}/2$ et $\beta=c^{1/6}/2$, ce qui donne
$a=c^{1/6}\sqrt{3}$, $a'=-a$, $a''=0$ et $\{a ; a' ; a''\}=\{-c^{1/6}\sqrt{3} ; 0 ; c^{1/6}\sqrt{3}\}$.

3) On vient de montrer que si b=0, un des nombres a, a', a'' est rationnel, puisque l'un est égal à 0, cela pour tout c positif. C'est pour cette raison que l'on suppose maintenant $b\neq0$.

On a $a^3=2b+3z_1z_2(z_1+z_2)=2b+3(b^2+c)^{1/3}a$, c'est-à-dire a est solution de l'équation
$X^3-3(b^2+c)^{1/3}X-2b=0$.
De façon analogue on vérifie que a'et a'' sont solutions de cette équation.
Comme a, a', a'' sont distincts, ce sont les trois solutions de cette équation : donc a ou a' ou a'' sera rationnel exige que cette équation admette une solution rationnelle.
Comme $b\neq0$, cette équation n'admet pas 0 comme solution, et donc elle s'écrit

$(X^3-2b)/(3X)=(b^2+c)^{1/3}$: donc si elle admet une solution rationnelle, c'est que nécessairement $(b^2+c)^{1/3}$ est un rationnel et donc b^2+c est le cube d'un rationnel.
Supposons qu'il en soit ainsi et soit p rationnel tel que $b^2+c=(-p/3)^3$ et posons $-2b=q$: alors a, a' a" sont les trois solutions réelles de $X^3+pX+q=0$ (on vérifie que $4p^3+27q^2=-4\times27c<0$).

On peut alors conclure à
a ou a' ou a" est rationnel $\Leftrightarrow$ b^2+c est le cube d'un rationnel (noté -p/3) et, (en notant q=-2b), l'équation $X^3+pX+q=0$ posséde une solution rationnelle.

Rappel : à l'aide d'un nombre fini d'essais, on est capable de savoir si une équation à coefficients rationnels admet une solution rationnelle (voir conseil pratique situé à la fin du commentaire sur les équations n°2 et n°3 de cette 1ière série d'exemples de ce chapitre).

4) cas1
$b=35/216$, $c=1/48$: $b^2+c=(13/36)^3$ est bien le cube d'un rationnel (13/36) et a,a', a" sont les trois racines de $X^3+pX+q=0$ avec $p=-13/12$, $q=-35/108$, soit $108X^3-117X-35=0$ qui a trois solutions rationnelles -5/6, -1/3, 7/6 et donc **a, a' a" sont rationnels** :{a ;a' ;a"}={-5/6 ; -1/3 ; 7/6}.

Cherchons les racines 3ièmes de $35/216+1/(4\sqrt{3})i$: on cherche les réels α et β tels que $(\alpha+i\beta)^3=35/216+1/(4\sqrt{3})i$.
Comme $216=6^3$, on pose $\alpha=u/6$ et aussi $\beta=v/\sqrt{3}$ et par identification on obtient : $u^3-36uv^2=35$ et $v(u^2-4v^2)=3$.
En cherchant u et v entiers, on voit que v doit diviser 3 : v=-1 et u=-1 conviennent et donc

> une racine 3ième de $35/216+1/(4\sqrt{3})i$ est $-1/6-i/\sqrt{3}$ et en multipliant par j et j^2 on obtient les deux autres $7/12+i\sqrt{3}/12$ et $-5/12+i\sqrt{3}/4$.

En prenant $\alpha=-1/6$ et $\beta=-1/\sqrt{3}$, on vérifie tout de suite que

> $\{a ;a' ;a''\}=\{2\alpha ; -\alpha-\beta\sqrt{3} ; -\alpha+\beta\sqrt{3}\}=\{-5/6 ; -1/3 ; 7/6\}$

.

cas 2
$b=-2$, $c=4$: $b^2+c=2^3$ est bien le cube d'un rationnel (2) et a,a', a" sont les trois racines de $X^3+pX+q=0$ avec $p=-6$, $q=4$, soit $X^3-6X+4=0$ qui a cette fois une seule solutions rationnelle 2, les deux autres solutions étant $-1+\sqrt{3}$ et $-1-\sqrt{3}$ et {a ;a' ;a"}={$-1-\sqrt{3}$; 2 ; $-1+\sqrt{3}$}. Dans ce cas **seul un des trois nombres a, a', a" est rationnel**.
Bien entendu, se poser la question de savoir lequel est rationnel n'a pas de sens, car ces trois nombres ne sont définis qu'à l'ordre près (voir question 2).

Cherchons une racine 3ième de -2+2i : $(\alpha+i\beta)^3=-2+2i$ donne $\alpha^3-3\alpha\beta^2=-2$ et $3\alpha^2\beta-\beta^3=2$.
En cherchant α et β entiers, on voit qu'ils doivent diviser 2 : $\alpha=1$ et $\beta=1$ conviennent et donc

> une racine 3ième de -2+2i est 1+i, les deux autres (on multiplie par j et j^2) sont $-1/2-\sqrt{3}/2+i(-1/2+\sqrt{3}/2)$ et $-1/2+\sqrt{3}/2+i(-1/2-\sqrt{3}/2)$.

On vérifie, là aussi, avec $\alpha=1$ et $\beta=1$ que

> $\{a ;a' ;a''\}=\{2\alpha ; -\alpha-\beta\sqrt{3} ; -\alpha+\beta\sqrt{3}\}=\{-1-\sqrt{3} ; 2 ; -1+\sqrt{3}\}$

.

Solution de l'exercice 11 :

L'équation (E) $x^3+(r-1)x-r=0$ est de la forme $x^3+px+q=0$ avec $p=r-1$, $q=-r$.
Donc $4p^3+27q^2=4(r-1)^3+27r^2$, expression qui est nulle pour $r=-2$, et par division euclidienne, $4p^3+27q^2=(r+2)^2(4r-1)\geq 0$.

Donc **si r>1/4**, l'équation (E) a une seule solution réelle, qui est forcément 1, et le 1er cas de l'encadré du début du chapitre 4 donne :
$1=u+v=A'^{1/3}+B'^{1/3}$ avec $A'=r/2-(((r-1)/3)^3+(r/2))^{1/2}$ et $B'=r/2+(((r-1)/3)^3+(r/2))^{1/2}$.
Mais $(((r-1)/3)^3+(r/2))^{1/2}=(r+2)(4r-1)^{1/2}/(6\times 3^{1/2})$, et comme $(3\times 3^{1/2})^{1/3}=3^{1/2}$, on obtient le résultat annoncé.
Mais**si r=1/4**, le résultat annoncé est encore vrai, puisque le membre de droite est $(3\times 3^{1/2}/8)^{1/3}+(3\times 3^{1/2}/8)^{1/3}=3^{1/2}$.

> Cela provient du fait que si $r=1/4$ alors $4p^3+27q^2=0$, et donc (voir remarque du cas $4p^3+27q^2=0$ dans l'encadré du début du chapitre 4) les racines de (E) sont $3q/p=1$ (simple) et $-3q/(2p)=-1/2$ (double), mais dans ce cas $u=v=(-q/2)^{1/3}=3q/(2p)$ et $u+v=1$.

Pour $r\geq 1/4$, $(r+2)(4r-1)^{1/2}\geq 3\times 3^{1/2}r \Leftrightarrow (r+2)^2(4r-1)\geq 27r^3 \Leftrightarrow r\geq 1$, puisque $(r+2)^2(4r-1)=4(r-1)^3+27r^3$.

Cas particuliers :

> $r=1/4$ a été vu ci-dessus : $3^{1/2}=(3\times 3^{1/2}/8)^{1/3}+(3\times 3^{1/2}/8)^{1/3}$
>
> $r=1$ donne $3^{1/2}=0^{1/3}+(3\times 3^{1/2})^{1/3}$, pas très intéréssant aussi
>
> par contre $r=2$ donne
> $3^{1/2}=(3\times 3^{1/3}-2\times 7^{1/2})^{1/3}+(3\times 3^{1/3}+2\times 7^{1/2})^{1/3}=(2\times 7^{1/2}+3\times 3^{1/2})^{1/3}-(2\times 7^{1/2}-3\times 3^{1/2})^{1/3}$, moins immédiat à vérifier directement! (note : $2\times 7^{1/2}-3\times 3^{1/2}>0$).

2ième série d'exemples avec uniquement $4p^3+27q^2<0$ et par utilisation des formules de Viète			
Equation (E)	$3q/(2p\sqrt{(-p/3)})$	$\theta=\text{Arcos}[3q/(2p\sqrt{(-p/3)})]$ $2\sqrt{(-p/3)}$	les 3 solutions de (E) x_1, x_2, x_3
n°1 $x^3-3x-1=0$	1/2	$\pi/3$ 2	$x_1=2\cos(\pi/9)$ $x_2=2\cos(7\pi/9)$ $x_3=2\cos(5\pi/9)$
n°2 $x^3-3x+1=0$	-1/2	$2\pi/3$ 2	$x_1=2\cos(2\pi/9)$ $x_2=2\cos(8\pi/9)$ $x_3=2\cos(4\pi/9)$
n°3 $x^3-6x-4=0$	$\sqrt{2}/2$	$\pi/4$ $2\sqrt{2}$	$x_1=2\sqrt{2}\cos(\pi/12)$ $x_2=2\sqrt{2}\cos(3\pi/4)=-2$ $x_3=2\sqrt{2}\cos(7\pi/12)$
n°4 $x^3-7x+6=0$	$-(9/7)\sqrt{(3/7)}$	$\theta=?\approx147{,}32°$ $2\sqrt{(7/3)}$	$x_1=2\sqrt{(7/3)}\cos(\theta/3)$ $x_2=2\sqrt{(7/3)}\cos(\theta/3+2\pi/3)$ $x_3=2\sqrt{(7/3)}\cos(\theta/3+4\pi/3)$ elles se simplifient énormément : do you see?

<u>Commentaire sur l'équation n°1</u>

La méthodeHudde-Cardan donne le même résultat (voir 1ère série d'exemples).

<u>Commentaire sur l'équation n°2</u>

ras

<u>Commentaire sur l'équation n°3</u>

La solution -2 pouvait se prévoir évidemment puisque les solutions entières sont à chercher parmi les diviseurs de q=-4 ; et soit par factorisation par x+2 on se ramène à un deuxième degré et les 2 autres solutions sont $x_1=1+\sqrt{3}$ et $x_3=1-\sqrt{3}$, (ce qu'on peut vérifier par un calcul trigonométrique à partir du fait que $2(\pi/12)=\pi/6$ ou que $\pi/12=\pi/3-\pi/4$), soit on utilise les formules simplifiées dans le cas $4p^3+27q^2<0$: ici a=2 et les deux autres solutions sont $-a/2\pm\sqrt{(-3a^2-p)}=1\pm\sqrt{(-3+6)}$.

On vérifie là aussi, que toutes les solutions -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$ sont dans $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})$ (voir simplification des formules de Cardan), puisque $\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]}=\sqrt{432}=12\sqrt{3}$ et $Q(\sqrt{[-(4p^3+27q^2)]})=Q(\sqrt{3})$.

Commentaire sur l'équation n°4

Les solutions sont "évidemment" 1,2 et -3 (diviseurs de q=6) ; et cf $x_2<x_3<x_1$ (voir chapitre 4) $x_2=-3$, $x_3=1$, $x_1=2$

Voir commentaire de l'équation n°7 de la 1ère série d'exemples : la méthode de Hudde-Cardan "coince" aussi pour trouver les solutions simplifiées.

Une conclusion sur ces deux séries d'exemples :

les formules de Cardan ou de Viète ont parfois du mal à donner les solutions simplifiées de $x^3+px+q=0$, et même il peut être plus facile de résoudre une équation avec des coefficients littéraux plutôt qu'avec des coefficients numériques : voir les équations 1 et 2 de la 1ère série d'exemples.

Cependant le fait que, pour $4p^3+27q^2=0$, les 3 solutions de $x^3+px+q=0$ soient 0 (triple) si p=0, 3q/p (simple) et -3q/(2p) (double) si p non nul, et que pour $4p^3+27q^2$ non nul, les 3 solutions de $x^3+px+q=0$ soient $u+v$, $ju+j^2v$, j^2u+jv avec u et v racines 3ièmes respectives de X_1 et X_2 et $uv=-p/3$, prouve que pour toute équation du 3ième degré, ses racines (dans C) s'obtiennent à l'aide de radicaux (éventuellement emboîtés, inexistants en fait si $4p^3+27q^2=0$) portant sur les coefficients de l'équation : on dit que l'équation du 3ième degré est résoluble par radicaux (voir chapitre 7 où cette notion sera précisée).

Retour sommaire sur les équations ou chapitre 6 sur les équations ou sommaire du site