sommaire du site

Sommaire sur les équations

Chapitre 1

Sur le nombre de solutions réelles de l'équation (E) $x^3+px+q=0$ avec p et q réels

$4p^3+27q^2<0$	3 solutions réelles distinctes

	toutes de carré $<-4p/3$ et donc dans $]-2\sqrt{(-p/3)};2\sqrt{(-p/3)}[$
$4p^3+27q^2=0$	soit $p=q=0$ et il y a une seule solution réelle qui est triple : 0 soit $p<0$ et alors il y a 2 solutions réelles distinctes $3q/p$ (simple) et $-3q/(2p)$ (double) Remarques : $-3q/(2p)=-\sqrt{(-p/3)}$ si $q>0$, $=\sqrt{(-p/3)}$ si $q<0$ $-3q/2p=(q/2)^{1/3}$ $x^3+px+q=(x-3q/p)(x+3q/(2p))^2$
$4p^3+27q^2>0$	il y a une seule solution réelle (simple) a $a^2>-4p/3$ et pour $p<0$: $a\in]-\infty;-2\sqrt{(-p/3)};[\cup]2\sqrt{(-p/3)};+\infty[$
Bien entendu en faisant $p=0$ (et $q=-X$) on retrouve le résultat bien connu : pour tout réel X, il existe un et un seul réel x tel que $x^3=X$ ce réel x est la racine 3ième, réelle, de X, elle est notée $\sqrt[3]{X}$ ou $X^{1/3}$ Rappelons que l'on a toujours $(-X)^{1/3}=-X^{1/3}$, par contre l'égalité $X^{1/3}=e^{(1/3)\ln X}$ n'est vraie que pour $X>0$.	

Preuves :

Posons $f(x)=x^3+px+q$: f étant continue sur R et les limites aux bornes étant $-\infty$ et $+\infty$, f(R)=R et l'équation f (x)=0 admet toujours au moins une solution réelle.

$f'(x)=3x^2+p$

<u>cas 1</u> : si $p\geq0$

f est strictement croissante sur R et $f(x)=0$ admet une seule solution réelle ; elle est simple pour (p,q) différent de (0,0) car pour avoir en même temps $f(x)=0$ et $f'(x)=0$ il faudrait que $p=0$ et $x=0$ (cf $f'(x)=0$) et donc $q=0$ pour avoir $f(x)=0$.

<u>cas 2</u> : si $p<0$

f' s'annule pour $s=\sqrt{(-p/3)}$ et pour $-s$ ($-s<0<s$) ; comme $f(x)=xf'(x)/3+2px/3+q$ on a $f(s)=2ps/3+q$ et $f(-s)=-2ps/3+q$, donc $f(s)<f(-s)$ et $f(s)f(-s)=q^2-4p^2s^2/9=(4p^3+27q^2)/27$.

Il y a donc un maximum relatif en -s et un minimum relatif en s :

x	$-\infty$		-s		s		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	/	f(-s)	\	f(s)	/	$+\infty$

cas 2.1 $4p^3+27q^2<0$

f(s) et f(-s) sont de signes contraires donc $f(s)<0< f(-s)$: il y a 3 solutions réelles distinctes : $x_1< -s<x_2<s<x_3$.

Précisons :

$f(2s)=8s^3+2ps+q=8(-p/3)s+2ps+q=(-2p/3)s+q=f(-s)$ et $f(-2s)=(2p/3)s+q=f(s)$.

Vu que $f(s)<0<f(-s)$ on a $f(s)<0<f(2s)$ et $f(-2s)<0<f(-s)$, d'où $s<x_3<2s$ et $-2s<x_1<-s$

Finalement, les 3 solutions sont dans]-2s;2s[, donc leur carré est inférieur à $4s^2=-4p/3$.

cas 2.2 $4p^3+27q^2=0$

f(s)=0 ou f(-s)=0, et comme f(s)<f(-s)

--Soit f(s)=0 et s est solution (double car f(s)=f'(s)=0) et alors f(-s)>f(s)=0, donc il y a une autre solution <-s , forcément simple car elle n'annulera pas f'.
Mais $f(s)=2ps/3+q=0$ donc $s=-3q/(2p)$; or $s=\sqrt{(-p/3)}>0$ donc q>0 (on peut vérifier qu'en élevant au carré ces 2 expressions positives de s, on obtient bien la même chose).

--Soit f(-s)=0 et -s est solution (double car f(-s)=f'(-s)=0) et alors 0=f(-s)>f(s), donc il y a une autre solution >s, forcément simple.
Comme $f(-s)=-2ps/3+q=0$ on a cette fois $s=3q/(2p)$ donc $-s=-3q/(2p)$; or $s=\sqrt{(-p/3)}>0$ donc q<0

Finalement que q soit positif ou négatif (il ne peut être nul ici) il n'y a que 2 solutions réelles, une égale à $-3q/(2p)$ qui est double et une autre simple. Mais puisque le coefficient de x^2 dans l'équation (E) est 0, c'est que la somme des 3 solutions (comptées avec leur multiplicité) de l'équation est 0 : donc $-3q/(2p)-3q/(2p)$+l'autre=0 : donc l'autre est $3q/p$!

Je laisse le lecteur vérifier que l'on a effectivement, si $4p^3+27q^2=0$, $x^3+px+q=(x-3q/p)(x+3q/(2p))^2$.
Notons aussi que $-3q/2p=(q/2)^{1/3}$ (on élève au cube).

cas 2.3 $4p^3+27q^2>0$ (comme p<0, on a $q\neq0$)

f(s) et f(-s) sont de même signe, donc il y a une seule solution réelle qui est soit inférieure à -s si f(-s) et f(s) sont positifs, soit supérieure à s si f(-s) et f(s) sont négatifs et cette unique solution réelle est simple car elle est différente de -s et s et donc elle n'annule pas f'.
Vu que $f(s)=2ps/3+q$ et $f(-s)=-2ps/3+q$, et que p<0, on voit tout de suite que le signe commun à f(s) et f(-s) est celui de q.
Soit a cette unique solution réelle :
si f(s)>0 alors a<-s<0 donc $a^2>s^2$, si f(s)<0 alors a>s>0 donc $a^2>s^2$ et donc on a toujours

$a^2>-p/3$; mais on peut faire mieux.
En effet $f(2s)=(-2p/3)s+q=f(-s)$ et $f(-2s)=(2p/3)s+q=f(s)$ (voir cas 2.1) donc $f(2s)$ et $f(-2s)$ ont le même signe : le signe commun à $f(s)$ et $f(-s)$, soit celui de q.
Soit $q>0$ et $f(-2s)>0$, d'où $a<-2s<0$ et $a^2>4s^2$, soit $q<0$ et $f(2s)>0$, d'où $0<2s<a$ et $a^2>4s^2$.

<u>Conclusion</u> :

si $4p^3+27q^2<0$: forcément $p<0$, donc 3 solutions réelles (distinctes) et toutes de carré< $-4p/3$, voir cas 2.1.

si $4p^3+27q^2=0$: soit $p<0$, donc uniquement 2 solutions réelles $-3q/(2p)$ (double) et $3q/p$, voir cas 2.2, soit $p=q=0$ et l'équation est alors $x^3=0$ et elle admet une seule solution réelle 0 (triple)

si $4p^3+27q^2>0$: soit $p\geq 0$ et il y a une seule solution réelle simple (f est strictement croissante sur R, et (p,q) différent de $(0,0)$ voir cas 1), soit $p<0$ et on a encore une seule solution réelle simple (mais f n'est pas strictement croissante sur R, voir cas 2.3).

Cette seule solution réelle étant notée a : si $p<0$ on a $a^2>-4p/3$ (montré dans le cas 2.3), si $p>0$ l'inégalité précédente est évidemment vraie, et si $p=0$ comme $4p^3+27q^2>0$, q ne peut être nul donc a n'est pas nul et l'inégalité est encore vraie.

Chapitre 2

Résolution dans C des équations $z^3=1$ et $z^3=Z$ *(non nul)*

Equation	Ensemble solution
$z^3=1$	$\{1 \ ; \ j \ ; \ j^2\}$
$z^3=Z$	$\{z_0 \ ; \ jz_0 \ ; \ j^2z_0\}$ avec $z_0=\lvert Z\rvert^{1/3}\exp(i\alpha/3)$ $\lvert Z\rvert\exp(i\alpha)$ étant la forme trigonométrique de Z (non nul), avec α choisi, par exemple, dans $]-\pi,\pi]$. si Z est réel, $z_0=Z^{1/3}$ (la racine 3ième réelle de Z)

Preuves :

<u>Equation</u> $z^3=1$

$z^3=1 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+z+1)=0 \Leftrightarrow z=1$ ou $z=(-1+i\sqrt{3})/2$ ou $z=(-1-i\sqrt{3})/2$ (cela par résolution de $z^2+z+1=0$ qui s'écrit $(z+1/2)^2+3/4=0$) ; on peut vérifier que la 3ième solution est le carré de la 2ième qui est notée j.

Donc l'équation $z^3=1$ a 3 solutions : 1, j, j^2 avec $j=(-1+i\sqrt{3})/2$; outre évidemment $j^3=1$ on a la relation souvent bien utile $1+j+j^2=0$ et aussi j et j^2 sont conjugués.

<u>Equation</u> $z^3=Z$ (non nul, sinon c'est trivial)

En pratique il y a deux cas :

--on connaît une solution z_0 de cette équation : elle s'écrit donc $(z/z_0)^3=1$ et donc elle admet 3 solutions z_0, jz_0, j^2z_0.

--on ne connaît pas de solution, on n'en "devine" aucune : il faut en chercher une!!

Pour cela on utilise la forme trigonométrique : tout nombre complexe non nul z s'écrit $z=|z|\exp(i\theta)=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$, avec les 2 résultats suivants : $\cos\theta+i\sin\theta=\cos\theta'+i\sin\theta' \Leftrightarrow \theta = \theta'+2k\pi$ avec k dans Z et $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$ pour tout entier relatif n (c'est la formule de Moivre) ; $|z|$ est le module de z et θ est l'argument (ou un représentant de l'argument) de z.

En particulier $j=\exp(i2\pi/3)$, $j^2=\exp(i4\pi/3)=\exp(-i2\pi/3)$.

D'où en écrivant Z sous forme trigonométrique : $Z=|Z|\exp(i\alpha)$, l'équation $z^3=Z$ s'écrit $|z|^3\exp(i3\theta)=|Z|\exp(i\alpha)$, et donc

$|z|=|Z|^{1/3}$ (cad le module de z est la racine 3ième réelle du module de Z) et $3\theta = \alpha+2k\pi$ soit $\theta = \alpha/3+2k\pi/3$, pour k dans Z, et ainsi on a montré que l'équation $z^3=Z$ (rappel Z est non nul) a toujours 3 solutions distinctes, obtenues en faisant k=0, k=1, k=2 :

$z_0=|Z|^{1/3}\exp(i\alpha/3)$, $z_1=|Z|^{1/3}\exp(i(\alpha/3+2\pi/3))$, $z_2=|Z|^{1/3}\exp(i(\alpha/3+4\pi/3))$ soit z_0, jz_0, j^2z_0 : on retrouve le 1er cas. Bien entendu on peut noter z_0 n'importe laquelle des 3 solutions les 2 autres seront toujours jz_0 et j^2z_0.

Dans le cas où on prend $z_0=|Z|^{1/3}\exp(i\alpha/3)$, avec α dans $]-\pi,\pi]$:

si Z est réel positif alors $\alpha=0$ et $z_0=|Z|^{1/3}=Z^{1/3}=$ la racine 3ième réelle de Z

si Z est réel négatif alors $\alpha=\pi$ et $z_0=|Z|^{1/3}\times(-1)=(-1)\times(-Z)^{1/3}=Z^{1/3}$ la racine 3ième réelle de Z.

Donc pour Z réel (non nul), les trois solutions de $z^3=Z$ sont $Z^{1/3}$, $Z^{1/3}j$, $Z^{1/3}j^2$.

Bien entendu, on pourrait choisir α ailleurs que dans $]-\pi,\pi]$, et pour Z>0 on pourrait avoir $\alpha=2\pi$, ce qui donnerait $z_0=|Z|^{1/3}j=Z^{1/3}j$ et les trois solutions de $z^3=Z$ deviennent $Z^{1/3}j$, $Z^{1/3}j\times j$, $Z^{1/3}j\times j^2$, ce qui redonne bien les trois précédentes.

Remarque : il n'est pas toujours possible d'expliciter l'argument d'un nombre complexe. Par exemple si Z=2-11i on a $|Z|=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ et son argument α vérifie $\cos\alpha+i\sin\alpha=2/(5\sqrt{5})-11i/(5\sqrt{5})$ et je ne connaît pas de forme explicite de α ; et donc on est embêté.

En fait ici, compte tenu que 2 et 11 sont entiers on peut essayer (pourquoi pas) de trouver une solution a+ib de $z^3=2-11i$ avec a et b entiers relatifs : cela conduit à $a(a^2-3b^2)=2$ et $b(3a^2-b^2)=-11$ donc a divise 2 et b divise 11, soit nécessairement a $=\pm1$ ou ±2 et $b=\pm1$ ou ±11 ce qui fait 16 possibilités. Mais si $b=\pm11$ la 2ième égalité donne $3a^2=\pm1+121$: 122, pas divisible par 3, ne convient pas, et 120 donne $a^2=40$ qui n'est pas un carré donc b=+/-1. Enfin, si b=1, cette 2ième égalité donne $3a^2=-10$ qui est impossible et donc b=-1 et il est facile de vérifier qu'alors seul a=2 peut convenir et ainsi on a explicité une solution de $u^3=2-11i$: u=2-i.

On peut raccourcir un peu en passant aux modules : $|z|^6=|2-11i|^2$, soit $(a^2+b^2)^3=125$ et donc $a^2+b^2=5$, ce qui interdit tout de suite la possibilité ±11 pour b.

Mais il ne faut pas se faire d'illusions : il est souvent très difficile d'expliciter les solutions de $z^3=Z$, autrement qu'avec des racines 3ième ou des puissances 1/3, cela même si Z est réel!

Par exemple est-ce que $(1+\sqrt{(28/27)})^{1/3}$ s'écrit sans racine 3ième et uniquement avec le symbole racine carrée d'un rationnel? Réponse dans le chapitre 5.

Chapitre 3

Résolution dans C de l'équation (E) $x^3+px+q=0$

avec p et q complexes

Une remarque préalable : toute équation du 3ième degré $ay^3+by^2+cy+d=0$ (a non nul) se ramène par translation à une équation de la forme $x^3+px+q=0$ en posant $y=x-b/(3a)$ et en divisant tout par a.	
$4p^3+27q^2\neq 0$	L'équation (E) admet 3 solutions distinctes. En notant X_1 et X_2 les 2 solutions distinctes de l'équation (E1) $X^2+qX-p^3/27=0$ u une racine 3ième de X_1 , v une racine 3ième de X_2 avec $uv=-p/3$ alors les 3 solutions, distinctes, de (E) sont : $u+v$ $ju+j^2v$ j^2u+jv (preuve par la méthode de Hudde en posant $x=u+v$ avec $uv=-p/3$) Cette équation (E1) est appelée résolvante de l'équation (E)
$4p^3+27q^2=0$	soit $p=q=0$ et il y a une seule solution qui est réelle et triple : 0 soit $p\neq 0$ et alors $x^3+px+q=(x-3q/p)(x+3q/(2p))^2$ il y a donc 2 solutions distinctes $3q/p$ (simple) et $-3q/(2p)$ (double)
Une alternative à la méthode de Hudde : on ramène l'équation $x^3+px+q=0$ à l'équation $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$ (auquel cas il n'y aura plus qu'à chercher les racines 3ièmes de t). En fait ce n'est pas possible si $p=0,q\neq 0$ (ce qui n'est pas trop gênant) mais aussi si $p\neq 0$ et $4p^3+27q^2=0$ (c'est un peu plus gênant) ; dans le cas $p\neq 0$ et $4p^3+27q^2\neq 0$ c'est possible : r et s sont solutions d'une équation du 2ième degré qui est, à une homothétie près, l'équation (E1) de Hudde, et d'ailleurs, à condition de "bien choisir" les racines 3ièmes de $t=r/s$ on retrouve formellement les mêmes solutions que Hudde! Cette méthode date de 1995, voir annexe 1 . Cependant l'idée de ramener $x^3+px+q=0$ à $y^3+k=0$ est plus ancienne : méthode de Tschirnhaus (1683) avec y polynôme du second degré en x, alors que ci-dessus $y=(x-r)/(x-s)$ est une fonction homographique de x. En fait ces deux méthodes se rejoignent sur le fond : voir annexe 2.	
Soient x_1, x_2, x_3 les 3 solutions dans C (comptées avec leur multiplicité) de (E) et $s=(x_1+jx_2+j^2x_3)^3$. En considérant les 6 permutations possibles de (x_1,x_2,x_3), alors s prend au plus 2 valeurs distinctes, s_1 et s_2, racines de $X^2+27qX-27p^3=0$, qui n'est autre que l'équation (E1), à une homothétie près (remplacer X par 27X donne exactement (E1)). Par résolution d'un systéme linéaire de 3 équations (les résolvantes de Lagrange) à 3 inconnues on retrouve les formules ci-dessus donnant les 3 solutions de (E).	
Il est bien connu que pour une équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ de racines x_1 et x_2 (dans C), on a $a^2(x_1-x_2)^2=b^2-4ac$, appelé discriminant de l'équation ;	

de même en notant x_1,x_2,x_3 les 3 solutions, dans C, de (E) on a $((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3))^2=-(4p^3+27q^2)$, appelé aussi discriminant de l'équation (E)

Preuves :

La méthode exposée ci-dessous est attribuée au mathématicien Hudde Johann, Amsterdam 1630-1704.

On pose $x=u+v$ avec $uv=-p/3$ (notons que quelque soit x dans C, il existe effectivement toujours un couple (u,v) de deux nombres complexes tel que $x=u+v$ et $uv=-p/3$: on prend pour u et v les deux solutions (dans C, éventuellement confondues) de $W^2-xW-p/3=0$, cf les deux nombres de somme S et de produit P sont les deux solutions (éventuellement confondues) de $W^2-SW+P=0$.

En reportant dans (E) on obtient $u^3+v^3+q=0$, mais $u^3v^3=-p^3/27$ donc u^3 et v^3 sont les deux solutions de l'équation $X^2+qX-p^3/27=0$ (même raison que ci-dessus) ; cette équation admet dans C deux solutions distinctes X_1 et X_2, puisque son discriminant $q^2+4p^3/27$ est non nul par hypothèse.

Donc nécessairement si x est solution de (E) il s'écrit $x=u+v$ avec $uv=-p/3$ et u^3 et v^3 étant les deux solutions de

<u>l'équation (E1)</u> $X^2+qX-p^3/27=0$, <u>dont les solutions distinctes seront notées</u> X_1 et X_2**.**

La réciproque est vraie : tout x s'écrivant comme ci-dessus est solution de (E).

En effet si $uv=-p/3$ et si u^3 et v^3 sont les deux solutions de (E1) alors $(u+v)^3+p(u+v)+q=u^3+3uv(u+v)+v^3(u+v)-4=u^3+v^3+q$, mais u^3 et v^3 étant les deux solutions de (E1) leur somme est "-b/a"=-q et $u^3+v^3+q=0$ et ainsi u+v est bien solution de (E).

<u>Finalement</u> :

<u>Résoudre l'équation du 3ième degré (E) revient à</u>

a) <u>trouver les solutions distinctes</u> X_1 et X_2 <u>de l'équation du second degré (E1)</u>

b) <u>trouver tous les couples (u,v) tels que uv=-p/3 et tels que</u> u^3 et v^3 <u>soient les deux solutions de (E).</u>

Essayons de déterminer tous ces couples et les solutions de (E) correspondantes.

Soit $u^3=X_1$, $v^3=X_2$, $uv=-p/3$, soit $u^3=X_2$, $v^3=X_1$, $uv=-p/3$ mais cela revient à échanger u et v donc on obtient le même $x=u+v$: on peut donc se limiter à $u^3=X_1$, $v^3=X_2$, $uv=-p/3$.

<u>cas 1</u> : $4p^3+27q^2\neq 0$

<u>cas 1.1</u> : $p\neq 0$: donc X_1 et X_2 sont non nuls (leur produit est $-p^3/27$)

En notant u' une racine 3ième de X_1 et v' une racine 3ième de X_2, d'après le chapitre 2

$u=u'$ ou ju' ou j^2u' et $v=v'$ ou jv' ou j^2v', ce qui donne (puisque u' et v' ne sont pas nuls) à priori 9 couples (u,v) :

couple (u,v)	(u',v')	(u',jv')	(u',j^2v')	(ju',v')	(ju',jv')	(ju',j^2v')	(j^2u',v')	(j^2u',jv')	(j^2u',j^2v')
uv	u'v'	ju'v'	j^2u'v'	ju'v'	j^2u'v'	u'v'	j^2u'v'	u'v'	ju'v'

On constate donc qu'on obtient que 3 valeurs pour uv : u'v', ju'v', j^2u'v'. Pour chacune de ces 3 valeurs, les 3 couples les donnant sont de la forme (u",v"), (ju",j^2v"), (j^2u",jv").

Comme $u'v'\neq 0$, les 3 valeurs u'v', ju'v', j^2u'v' sont distinctes deux à deux et comme le cube de chacune est $-p^3/27$, ce sont les trois racines 3ièmes de $-p^3/27$, et donc parmi elles une seule est égale à $-p/3$.

Finalement parmi les 9 couples (u,v) tels que $u^3=X_1$, $v^3=X_2$, seuls 3 couples sont tels que $uv=-p/3$: si l'un est (u,v) les 2 autres sont (ju,j^2v) et (j^2u,jv) et ainsi les solutions de (E) ne peuvent être que $u+v$, $ju+j^2v$ et j^2u+jv.

Ces 3 solutions sont distinctes 2 à 2, car par exemple $u+v=ju+j^2v$ conduit à $u=-(1+j)v=j^2v$ et donc $u^3=v^3$ ce qui est impossible, X_1 et X_2 étant différents puisque le discriminant de (E1) est $q^2+4p^3/27$, non nul par hypothèse.

<u>cas 1.2</u> $p=0$ (donc $q\neq 0$ car $4p^3+27q^2$ est $\neq 0$)

On a (par exemple) $X_1=0$ et $X_2=-q$, donc pour u la seule possibilité est 0 et pour v il y a toujours 3 possibilités : les 3 racines 3ièmes de -q ; donc il n'y a que 3 couples (u,v) possibles (0,v), (0,jv), (0,j^2v) avec v une racine 3ième de -q. Mais pour ces 3 couples (u,v) on a $uv=0=-p/3$ donc ils "conviennent" tous : il y a 3 solutions (distinctes car v est non nul) pour (E) $0+v$, $0+jv$, $0+j^2v$, ce sont les 3 racines 3ième de -q. Heureusement puisque dans ce cas l'équation (E) s'écrit...... $x^3=-q$!
Mais le but de ce raisonnement était de montrer que le résultat du cas 1.2, p=0, est similaire à celui du cas 1.1 ,$p\neq 0$; donc en fait on peut les résumer en un seul cas.

<u>cas 2</u> : $4p^3+27q^2=0$

Si p=0 on évidemment q=0 et l'équation devient $x^3=0$, donc 0 solution triple.

Si $p\neq 0$ (donc aussi $q\neq 0$)

La factorisation $x^3+px+q=(x-3q/p)(x+3q/(2p))^2$ trouvée au chapitre 4 reste évidemment valable pour x dans C d'où le résultat annoncé : (E) a 2 solutions distinctes 3q/p et -3q/2p (double)!

Mais pour le "fun" (<u>donc à sauter en 1ère lecture et même en 2ième..</u>) essayons de retrouver ce résultat en reprenant l'analyse ci-dessus : cette fois les solutions de (E1) ne sont pas distinctes puisque $X_1=X_2=-q/2$ qui est non nul, mais il y a encore 9 couples (u,v) tels que $u^3=-q/2$ et $v^3=-q/2$, et parmi eux, seuls 3 vérifient $uv=-p/3$: si l'un est (u,v) les 2 autres sont (ju,j^2v) et (j^2u,jv).

On peut alors remarquer que parmi les 3 racines 3ièmes de -q/2 une seule a pour carré -p/3 : en effet si u, ju, j^2u sont ces racines 3ièmes leur puissance 6ième est toujours $q^2/4=-p^3/27$ et ainsi u^2, $(ju)^2=j^2u^2$, $(j^2u)^2=ju^2$ (qui sont distincts) sont les 3 racines 3ième de $-p^3/27$: donc un seul de ces 3 nombres est -p/3.

En prenant pour u la seule racine 3ième de -q/2 dont la carré est -p/3, comme v doit être égal à u ou ju ou j^2u avec $uv=-p/3$ la seule possibilité est v=u et donc les 3 couples cherchés sont (u,u), (ju,j^2u) et (j^2u,ju), ce qui donnent pour (E) les 3 solutions u+u, $ju+j^2u$,j^2u+ju soit 2 solutions distinctes 2u et -u (puisque $j+j^2=-1$).

On peut vérifier que -u est solution double puisque la dérivée (pour la valeur x=-u) du 1er membre de l'équation (E) est $3(-u)^2+p=3(-p/3)+p=0$.

Déterminons u : par hypothèse $4p^3+27q^2=0$, donc $27q^3/8p^3=-q/2$, soit $(3q/2p)^3=-q/2$; donc u est soit 3q/(2p) soit j3q/(2p) soit $j^23q/(2p)$, mais seul 3q/(2p) a pour carré -p/3 (pour les autres il y a en plus le facteur multiplicatif j^2 ou j) : donc u=3q/2p et (E) a 2 solutions distinctes 3q/p et -3q/2p (double).

Sur la transformation de $x^3+px+q=0$ en $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$

$(x-r)^3-t(x-s)^3=(1-t)x^3+3(st-r)x^2+3(-s^2t+r^2)x+ts^3-r^3$

d'où x^3+px+q et $(x-r)^3-t(x-s)^3$ auront les mêmes racines (dans C)

ssi $t\neq1$, $st-r=0$, $3(-s^2t+r^2)/(1-t)=p$, $(ts^3-r^3)/(1-t)=q$

ssi $t\neq1$, $r=st$, $-3s^2t=p$, $s^3t(1+t)=q$

ssi $t\neq1$, $r=st$, $rs=-p/3$, $rs(r+s)=q$

On voit tout de suite que si p=0 alors rs=0 et on doit avoir q=0 : donc si p=0, $q\neq0$, on ne peut se ramener à $(x-r)^3-t(x-s)^3$; pour ce cas là la méthode de Hudde ne pose pas de problème.

Si p=0, q=0 (par curiosité car alors l'équation se réduit à $x^3=0$....), on aura $x^3=0 \Leftrightarrow (x-r)^3-t(x-s)^3=0$ ssi $t\neq1$, r=st, rs=0, ce qui se produit dans les deux cas suivants : soit $t\neq1$, s=0, r=0, soit t=0, $s\neq0$, r=0.

Supposons maintenant $p\neq0$

$x^3+px+q=0 \Leftrightarrow (x-r)^3-t(x-s)^3=0$ ssi $t\neq1$, $r=st$, $rs=-p/3$, $r+s=-3q/p$

r et s sont donc solutions de $X^2+(3q/p)X-p/3=0$ et r'=pr/3, s'=ps/3 sont eux solutions de $X^2+qX-p^3/27=0$ qui est exatement l'équation (E1) intervenant dans la méthode de Hudde : r' et s' sont les solutions X_1 et X_2 de (E1).

1er cas $4p^3+27q^2=0$

$r'=s'=-q/2$ qui est non nul car $p\neq 0$ et donc $r=s\neq 0$, ce qui entraîne $t=r/s=1$ et on ne peut se ramener à $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$.

2ième cas $4p^3+27q^2\neq 0$

cette fois r' et s' sont donc distincts, donc r et s aussi, donc $t=r/s\neq 1$ et l'équation se raméne à $(x-r)^3-t(x-s)^3=0$; mais x=s ne peut être solution de cette dernière équation car cela entraînerait r=s ce qui n'est pas le cas ici et donc

$x^3+px+q=0\Leftrightarrow(x-r)^3/(x-s)^3=t=r/s$ (non nul, car $rs=-p/3$, non nul). Il suffit alors de chercher une racine 3ième θ de t et $(x-r)/(x-s)=\theta$ ou $j\theta$ ou $j^2\theta$, ce qui donne les 3 solutions de l'équation.

A noter, que par rapport à la méthode de Hudde on a une seule recherche de racine 3ième : celle de r/s, alors qu'avec Hudde il faut chercher celles de X_1 et X_2 (cependant, si p et q sont réels ces deux nombres sont conjugués, donc les racines 3ièmes aussi).

A titre de curiosité, par un "bon choix" des racines 3ièmes de r/s, montrons que l'on retrouve formellement les solutions de Hudde.

Soient u une racine 3ième de $r'=pr/3$ et v une racine 3ième de $s'=ps/3$ telles que $uv=-p/3$:

cela est possible car si u' et v' sont des racines 3ièmes quelconques de r' et s' on a $u=j^k u'$ et $v=j^{k'}v'$ avec k et k' dans {0;1;2} et $uv=j^{(k+k')}u'v'$; mais $(u'v')^3=r's'=p^2rs/9=-p^3/27$ et donc $u'v'=-j^{k''}p/3$ pour un certain k'' dans {0;1;2}, soit $uv=j^{(k+k'+k'')}(-p/3)$: il suffit alors de choisir k et k' tels que k+k'+k''=3.

A ce niveau, u et v ont donc exactement la même signification que ceux de la méthode de Hudde.

On a donc $rs=-p/3=uv$ et comme p est non nul il en est de même pour v et s et donc $(u/v)^3=r'/s'=r/s$: u/v est évidemment une racine 3ième de r/s, mais elle est telle que $uv=-p/3$.

On a alors

$x^3+px+q=0\Leftrightarrow(x-r)^3/(x-s)^3=t=r/s=(u/v)^3\Leftrightarrow(x-r)/(x-s)=j^k u/v$ avec k=0 ou 1 ou 2 :

les trois solutions de $x^3+px+q=0$ sont donc $x_k=(r-j^k us/v)/(1-j^k u/v)$ pour k=0,1,2.

On peut les simplifier beaucoup : $x_k=s((u/v)^3-j^k(u/v))/(1-j^k u/v)=sj^k(u/v)(j^{-k}(u/v)^2-1)/(1-j^k u/v)$,

mais $j^{-k}=(j^k)^2$ et $v^3=ps/3=-uvs$ donne $su/v=-v$ d'où

$x_k=-vj^k((j^k u/v)^2-1)/(1-j^k u/v)=vj^k(j^k u/v+1)=j^{2k}u+j^k v$ et on arrive à

$x_0=u+v$, $x_1=j^2u+jv$, $x_2=ju+j^2v$: on retrouve exactement la même formulation des solutions que celle donnée par la méthode de Hudde.

On a évidemment 2 choix pour le couple (r',s') puisque r' et s' sont les solutions distinctes de (E1), mais échanger r' et s' c'est échanger u et v et on retrouve bien les mêmes solutions.

En conclusion, cette méthode qui consiste pour résoudre $x^3+px+q=0$ à se ramener à $(x-r)^3/(x-s)^3=0$ ne "marche" pas toujours ; cependant lorsqu'elle "marche" (cas intéressant : $p\neq 0$ et $4p^3+27q^2\neq 0$) elle ne nécessite qu'une recherche de racine 3ième ; c'est un avantage uniquement dans le cas p et/ou q sont complexes, car si p et q sont réels, la méthode de Hudde, en pratique, nécessite elle aussi une seule recherche de racine 3ième.

Voir en annexe 1 l'application de cette méthode à l'exemple $x^3-7x+6=0$.

Sur les résolvantes de Lagrange :

Directement, compte tenu que $j^3=1$, et en envisageant les 5 autres permutations on voit que $s=(x_1+jx_2+j^2x_3)^3$ peut prendre au plus 2 valeurs : $s_1=(x_1+jx_2+j^2x_3)^3$ et $s_2=(x_1+jx_3+j^2x_2)^3$; par exemple $(x_3+jx_2+j^2x_1)^3=(j^2(x_1+jx_3+j^2x_2))^3=(x_1+jx_3+j^2x_2)^3$.
Pour former l'équation du second degré ayant s_1 et s_2 comme racines on détermine leur somme et leur produit.

$(x_1+jx_2+j^2x_3)(x_1+jx_3+j^2x_2)=x_1^2+x_2^2+x_3^2-(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$, car $j+j^2=-1$, et compte tenu de l'identité $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$ on obtient

$(x_1+jx_2+j^2x_3)(x_1+jx_3+j^2x_2)=(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=0-3p=-3p$ et ainsi

$s_1s_2=-27p^3$.

Par utilisation de $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+c))+6abc$ on obtient

$s_1=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1^2(jx_3+j^2x_2)+j^2x_2^2(x_1+j^2x_2)+jx_3^2(x_1+jx_3))+6x_1x_2x_3$

$s_1=x_1^3+x_2^3+x_3^3+3(x_1^2(jx_2+j^2x_3)+j^2x_2^2(x_1+j^2x_3)+jx_3^2(x_1+jx_2))+6x_1x_2x_3$

et en "faisant rentrer" les j et j^2 dans les diverses parenthéses et remarquant que $j+j^2=-1$, on obtient

$s_1+s_2=2(x_1^3+x_2^3+x_3^3)-3(x_1^2(x_2+x_3)+x_2^2(x_1+x_3)+x_3^2(x_1+x_2))+12x_1x_2x_3$.

Le coefficient de -3 s'écrit $c=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)-3x_1x_2x_3=0-3(-q)=3q$.

Mais $x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3c-6x_1x_2x_3=0^3-9q-6(-q)=-3q$ et

$s_1+s_2=2(-3q)-9q+12(-q)=-27q$.

Ainsi s_1 et s_2 sont solutions de $X^2+27qX-27p^3=0$, qui donne (E1) si on change X en 27X :

c'est-à-dire $s_1/27$ et $s_2/27$ sont les solutions de (E1), et elles ne sont distinctes que si $4p^3+27q^2\neq0$.

s_1 et s_2 s'obtiennent donc par résolution d'une équation du second degré, puis à l'aide de racines 3ième on obtient $x_1+jx_2+j^2x_3$ et $x_1+jx_3+j^2x_2$.

Soient u et v des racines 3ièmes respectives de $s_1/27$ et $s_2/27$: u et v ont donc la même signification que celle de l'exposé de la méthode de Hudde.

On a alors le systéme de 3 équations à 3 inconnues suivant à résoudre :

$x_1+x_2+x_3=0$// $x_1+jx_2+j^2x_3=3u$ (ou 3ju ou $3j^2u$) // $x_1+jx_3+j^2x_2=3v$ (ou 3jv ou $3j^2v$).

Prenons comme seconds membres des 2ième et 3ième équations, 3u et 3v : par ajout membre à membre on a $x_1=u+v$, en multipliant la 2ième ligne par j^2 et la 3ième par j on obtient, toujours par ajout, $x_2=j^2u+jv$ et de façon analogue $x_3=ju+j^2v$.

On reconnaît, formellement, les formules de Hudde.

Mais ces 3 valeurs sont-elles effectivement solutions de l'équation $x^3+px+q=0$? Pas forcément, contrairement à ce que j'ai pu lire parfois! En effet si on reporte ces 3 valeurs, elles seront solutions ssi on a (puisque $u^3+v^3=s_1/27+s_2/27=-q$) :

$(3uv+p)(u+v)=(3uv+p)(ju+j^2v)=(3uv+p)(j^2u+jv)=0$.

Si $uv\neq-p/3$ alors u+v, $ju+j^2v$ et j^2u+jv doivent être nuls, donc u et v doivent être nuls, donc s_1 et s_2 aussi, et finalement il faut p=q=0.

Donc si p ou q est non nul il faut absolument que uv=-p/3 (choix possible car $(uv)^3=(s_1/27)(s_2/27)=-p^3/27$) pour qu'effectivement u+v, j^2u+jv et $ju+j^2v$ soient les trois solutions de $x^3+px+q=0$; mais si p=q=0 alors s_1 et s_2 sont nuls et u=v=0 et la condition uv=-p/3 est forcément vérifiée, l'équation $x^3=0$ ayant bien 0 comme solution triple.

On peut conclure qu'il faut toujours choisir u et v tels que uv=-p/3, c'est-à-dire choisir deux racines 3ième de $s_1/27$ et $s_2/27$ dont le produit est -p/3,.....comme dans la méthode de Hudde!

Bien entendu (u et v étant choisis tels que uv=-p/3) si on prend comme second membre 3ju pour la 2ième équation, il faut alors prendre $3j^2v$ comme second membre de la 3ième équation, cela pour avoir encore $(ju)(j^2v)=-p/3$; on vérifie alors que l'on obtient les mêmes solutions pour $x^3+px+q=0$. Idem pour $3j^2u$ et 3jv.

Remarque 1

Pour l'équation $x^3+ax^2+bx+c=0$, de solutions x_1, x_2, x_3, on a, avec toujours $s_1=(x_1+jx_2+j^2x_3)^3$ et $s_2=(x_1+jx_3+j^2x_2)^3$, $s_1s_2=(a^2-3b)^3$ et $s_1+s_2=-2a^3+9ab-27c$.

Pour obtenir ce résultat on pose x=y-a/3 et on obtient l'équation $y^3+py+q=0$ (de solutions $y_i=a/3+x_i$) avec $p= -a^2/3+b$ et $q=2a^3/27-ab/3+c$ et donc $s_1s_2 =-27p^3=(a^2-3b)^3$ et $s_1+s_2=-27q=-2a^3+9ab-27c$, mais avec $s_1=(y_1+jy_2+j^2y_3)^3$ et $s_2=(y_1+jy_3+j^2y_2)^3$!

Heureusement $1+j+j^2=0$ et on a aussi $s_1=(x_1+jx_2+j^2x_3)^3$ et $s_2=(x_1+jx_3+j^2x_2)^3$.

Déterminons les solutions de $x^3+ax^2+bx+c=0$: celles de $y^3+py+q=0$ étant $y_1=u+v$, $y_2=j^2u+jv$ et $y_3=ju+j^2v$ (avec u et v racines 3ième des solutions $s_1/27$ et $s_2/27$ de l'équation (E1) $X^2+qX-p^3/27$, et telles que $uv=-p/3$) et puisque $x=y-a/3$,

les solutions de $x^3+ax^2+bx+c=0$ sont $x_1=-a/3+u+v$, $x_2=-a/3+j^2u+jv$ et $x_3=-a/3+ju+j^2v$, avec u et v racines 3ième des solutions $s_1/27$ et $s_2/27$ de l'équation $X^2+(2a^3/27-ab/3+c)X+(a^2/9-b/3)^3=0$, telles que $uv=a^2/9-b/3$.

On peut évidemment vérifier que ces 3 solutions sont les solutions du systéme :

$x_1+x_2+x_3=0$// $x_1+jx_2+j^2x_3=3u$ // $x_1+jx_3+j^2x_2=3v$

et elles sont effectivement solutions de $x^3+ax^2+bx+c=0$ car, par exemple pour $-a/3+u+v$,

$(-a/3+u+v)^3+a(-a/3+u+v)^2+b(-a/3+u+v)+c$
$=2a^3/27+u^3+v^3+a^2(u+v)/3+3uv(u+v)-2a^2(u+v)/3-ab/3+b(u+v)+c$,
et comme $u^3+v^3=(s_1+s_2)/27=-2a^3/27+ab/3-c$, on a bien
$(-a/3+u+v)^3+a(-a/3+u+v)^2+b(-a/3+u+v)+c=(-a^2/3+3uv+b)(u+v)=0$, puisque $uv=a^2/9-b/3$.

Remarque 2

La résolution de $x^2+px+q=0$ peut se faire aussi avec l'aspect ci-dessus des résolvantes :

En remarquant que -1 est une racine 2ième de 1 on considère $s=(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=p^2-4q$ et donc s ne prend qu'une seule valeur lorsqu'on permute x_1 et x_2, à savoir p^2-4q ; et par résolution du systéme $x_1-x_2=d$, $x_1+x_2=-p$ on obtient les formules habituelles pour x_1 et x_2 (d étant une racine 2ième du discriminant p^2-4q).

Sur le discriminant :

Posons $D=((x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3))^2$

Si $q=0$ alors, par exemple, $x_1=0$, et les 2 autres racines sont les 2 racines 2ièmes de $-p$, donc sont opposées et ainsi $D=(-2x_2^3)^2=4(x_2^2)^3=-4p^3=-(4p^3+27q^2)$

Si $q \neq 0$, toutes les racines sont non nulles, et en utilisant les relations coefficients-racines (elles se retrouvent tout de suite en identifiant le développement de $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ avec x^3+px+q) on a

$x_1+x_2+x_3=0$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=p$, $x_1x_2x_3=-q$, d'où

$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=x_3^2+4q/x_3=(x_3^3+4q)/x_3=(-px_3+3q)/x_3$, et par analogie pour les 2 autres facteurs de D on obtient

$D=(-px_1+3q)(-px_2+3q)(-px_3+3q)/(x_1x_2x_3)$, et en développant (parfois on n'a pas le choix...) :

$D=((-p^3x_1x_2x_3+3qp^2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+9q^2p(x_1+x_2+x_3)+27q^3)/(-q)$

$D=(p^3q+3qp^3+27q^3)/(-q)=-(4p^3+27q^2)$.

Un commentaire sur le discriminant :

On retrouve tout de suite que si $D\neq0$ alors les 3 racines sont distinctes et si $D=0$ il y a une racine double ou triple.

Dans le cas où p,q,r sont réels, on retrouve aussi (voir chapitre 1) que si $4p^3+27q^2>0$, donc $D<0$, alors les racines ne peuvent être toutes réelles (donc une seule réelle et deux qui sont imaginaires conjuguées ; car les racines imaginaires non réelles "vont par deux" puisque, l'équation étant à coefficients réels ici, la conjuguée d'une racine imaginaire non réelle est une autre racine imaginaire non réelle : cela sera prouvé directement au début du chapitre 4) et si $4p^3+27q^2<0$, donc $D>0$, alors les 3 racines sont réelles (sinon une, x_1, serait réelle et x_2, x_3, seraient imaginaires conjuguées, donc x_1-x_2 et x_1-x_3 aussi, et alors $(x_1-x_2)(x_1-x_3)=|x_1-x_2|^2$ et x_2-x_3 étant imaginaire pur on aurait $(x_2-x_3)^2<0$, soit $D<0$).

Bien entendu la notion de discriminant se généralise à tout polynôme : on peut commencer par définir le **résultant** de deux polynômes P et Q à coefficients complexes, de degrés respectifs $n\geq1$ et $m\geq1$, de coefficients dominants respectifs a et b, de racines respectives u_i et v_i par
$\mathbf{Rés(P,Q)=a^mb^n\prod_{1\leq i\leq n;1\leq j\leq m}(u_i-v_j)=a^m\prod_{1\leq i\leq n}Q(u_i)}$; attention $Rés(Q,P)=(-1)^{mn}Rés(P,Q)$.

Evidemment P et Q auront 1 racine commune si et seulement si leur résultant est nul.

Le discriminant de P (pour d°P≥2), ou le discriminant de l'équation P(x)=0, est alors $\mathbf{D=(-1)^{n(n-1)/2}Rés(P,P')/a=(-1)^{n(n-1)/2}a^{n-2}\prod_{1\leq i\leq n}P'(u_i)=a^{2n-2}\prod_{1\leq i<j\leq n}(u_i-u_j)^2}$:
il est nul ssi P a une racine multiple d'ordre ≥2.

Si P est unitaire, son discriminant est donc $D=\pi_{1\leq i<j\leq n}(u_i-u_j)^2$ ce qui redonne bien le D définit ci-dessus pour $P(X)=X^3+pX+q$; il est égal à $-(4p^3+27q^2)$.

Pour $P(X)=aX^2+bX+c$ on a $D=a^2(u_1-u_2)^2=a^2((u_1+u_2)^2-4u_1u_2)=a^2(b^2/a^2-4c/a)=b^2-4ac$.

Il existe une formule donnant le résultant de 2 polynômes quelconques en fonction de leurs coefficients : elle est donnée par leur déterminant de Sylvester qui est d'ordre la somme des degrés des polynômes, et donc il peut être lourd à développer.

Par exemple pour $P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$ et $P'(X)=3aX^2+2bX+c$, on démontre que P et P' auront une racine commune si et seulement si XP, P, X^2P', XP', P' sont linéairement indépendants, soit si et seulement si le déterminant 5×5 ci-dessous, donné ligne par ligne :

3a 2b c 0 0

0 3a 2b c 0

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 3a & 2b & c \\ a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \end{matrix}$$

est nul.
Ce déterminant est le déterminant de Sylvester de P et P' : il est égal (comme annoncé ci-dessus) au résultant R de P et P'.

Pour le calculer, on ajoute à la 1ière ligne la 4ième multipliée par -3, puis on développe par rapport à la première colonne (dont tous les éléments sont nuls, sauf le 4ième qui est a) ; on obtient -a fois un déterminant 4×4 dont la dernière colonne est /0/0/c/d/, et en le développant par rapport à cette colonne on obtient

$R=-a(-cD_1+dD_2)$ où D_1 et D_2 sont deux déterminants 3×3, pour lesquels Sarrus donne

$D_1=-2ac^2-2b^2c-9abd+6ac^2+b^2c+6abd$, $D_2=-4b^3-27a^2d+12abc+3abc$, et finalement

$R=a(4ac^3+4b^3d-b^2c^2+27a^2d^2-18abcd)$

D'où le discriminant de $P(X)=aX^3+bX^2+cX+d$ est $D=(-1)^{3(3-1)/2}$Rés(P,P')/a$=-R/a=-4ac^3-4b^3d+b^2c^2-27a^2d^2+18abcd$, ce qui redonne bien, dans le cas a=1,b=0,c=p, d=q, $D=-(4p^3+27q^2)$.

Terminons par cette analogie, entre l'équation du second degré $ax^2+bx+c=0$ avec a,b,c réels (a non nul) et l'équation du 3ième degré $x^3+px+q=0$ avec p et q réels. En notant D le discriminant du polynôme P constituant le 1er membre de l'équation (appelé aussi discriminant de l'équation P(x)=0) et en utilisant les résultats du chapitre 1 (et le début de ce commentaire sur le discriminant) on a :

Equation et Discriminant	D>0	D=0	D<0
$ax^2+bx+c=0$ a,b,c réels, a non nul $D=b^2-4ac$	deux racines réelles distinctes	une seule racine, réelle : -b/(2a),double	deux racines imaginaires conjuguées (distinctes)
$x^3+px+q=0$ p,q réels $D=-(4p^3+27q^2)$	trois racines réelles distinctes	soit p=0 (et donc q=0) : une seule racine, réelle qui est 0, triple soit p<0 (et donc q≠0) : uniquement deux racines distinctes, réelles qui sont 3q/p, simple et -3q/(2p), double	trois racines distinctes : une seule racine réelle et deux racines imaginaires conjuguées (distinctes)

Retour sommaire sur les équations ou chapitre 4 sur les équations ou sommaire du site