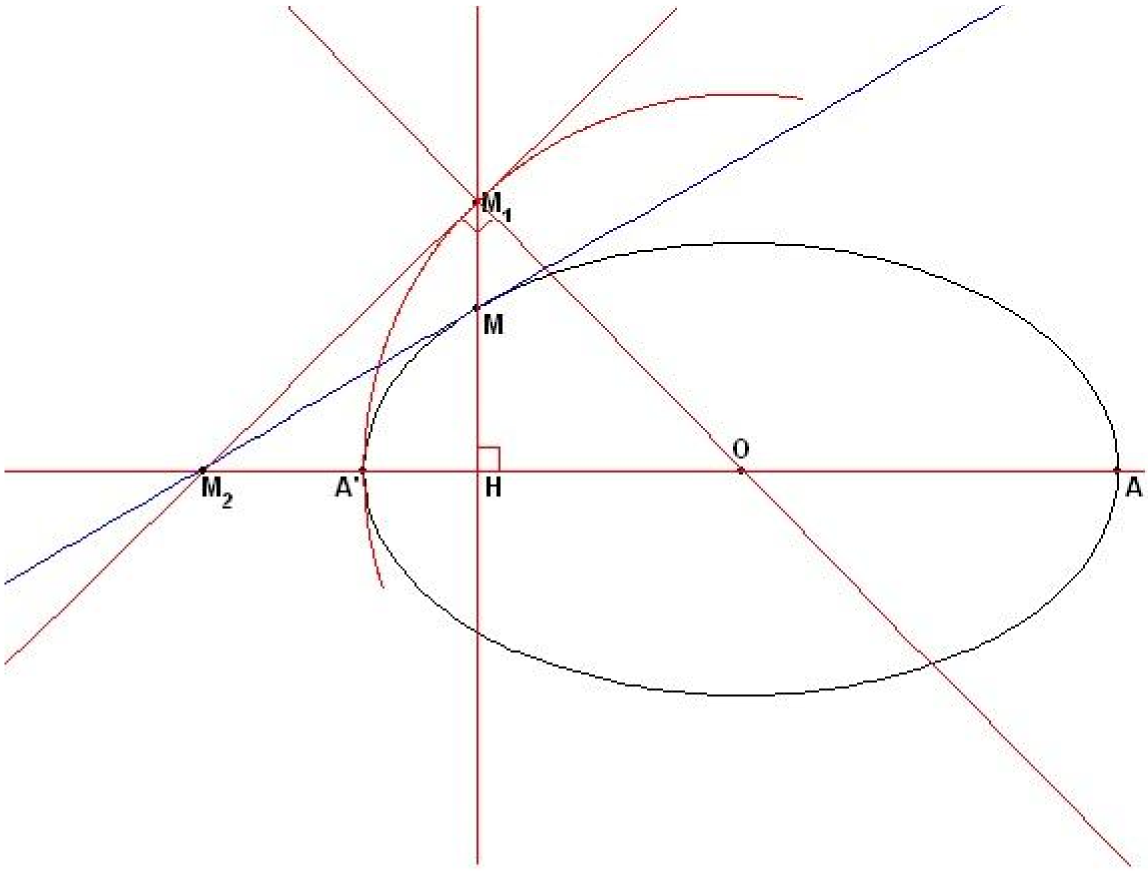
<- Sommaire Site

http://alain.pichereau.pages.perso-orange.fr
marc.pichereau@wanadoo.fr

Deux constructions à la règle et au compas de la tangente en un point M à une ellipse, sans utiliser les foyers

I) : via 1 milieu, 1 cercle et 2 perpendiculaires



Voici la méthode, en connaissant de l'ellipse au départ que deux de ses sommets A et A' portés par un même axe, lequel n'est pas nécessairement le grand axe, et un point M distinct d'un sommet (voir remarque 3 ci-dessous).

Toutes les constructions proposées se font à la règle et au compas de façon évidente :

- 0) Tracé de (AA') et construction du milieu O de [AA']
- 1) Construction du cercle *C* de centre O et passant par A ; dans la figure ci-dessus, *C* est le cercle principal de l'ellipse, sinon c'est simplement le cercle tangent à l'ellipse aux sommets du petit axe.
- 2) Construction de la perpendiculaire à (AA') passant par M : elle coupe *C* en un point M_1 situé du même côté de (AA') que M.
- 3) Construction de la tangente à *C* en M_1 : elle coupe (AA') en M_2

- 4) **La tangente en M à l'ellipse est alors la droite (MM_2)**

On déduit tout de suite de ce résultat la propriété suivante :
si M décrit une perpendiculaire à (AA'), excepté le point d'intersection avec (AA'), et ce point d'intersection étant strictement entre A et A', alors la tangente en M à l'ellipse passant par M et d'axe [AA'] coupe la droite (AA') en un pointe fixe : le point M_2.
Tout simplement parceque le cercle *C* étant toujours le même, le point M_1 est fixe, et donc M_2 aussi ; voir remarque 1 pour l'existence et l'unicité de l'ellipse passant par M et d'axe [AA'].

<u>1ière preuve du 4)</u> :
dans un repére orthonormé d'origine O et dont l'axe des abscisses passe par A et A', l'équation de l'ellipse est $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ avec a=OA.
Soit $M(x_0,y_0)$ un point de l'ellipse qui n'est pas un sommet et tel que $-a<x_0<0$ (cas de la figure).
La tangente en ce point M à l'ellipse a pour équation $xx_0/a^2+yy_0/b^2=0$, cf la courbe d'équation $f(x,y)=0$ a pour tangente en $M(x_0,y_0)$ la droite d'équation $(x-x_0)f'_{x_0}+(y-y_0)f'_{y_0}=0$.
Cette tangente coupe donc l'axe des abscisse en $T(a^2/x_0,0)$, ce qui veut dire que la tangente en M (x_0,y_0) à l'ellipse est la droite (MT).

Il reste à montrer que M_2 est justemment ce point T.

Cf le triangle M_2M_1O est rectangle en M_1, $HM_1^2=HO\times HM_2$(la hauteur issue de M_1 est moyenne géométrique des segments qu'elle découpe sur l'hypothénuse), soit
$a^2-x_0^2=|x_0|HM_2$.
D'où $HM_2=a^2/|x_0|-|x_0|$, et $HM_2+|x_0|=a^2/|x_0|$, cad
$OM_2=a^2/|x_0|$, ce qui prouve que M_2 a pour coordonnées $(a^2/x_0,0)$, et ainsi on a bien $\mathbf{M_2=T}$.

<u>2ième preuve du 4)</u> :
sans aucun calcul, si on connaît les affinités.
Soit f l'affinité de base (AA') qui transforme M_1 en M : elle transforme le cercle *C* en l'ellipse passant par A, A', M et telle que [AA'] soit un de ses axes (voir remarque 4 ci-dessous).
Cette affinité étant une application affine, elle conserve le contact, donc la tangente (M_1M_2) en M_1 à *C* est transformée en la tangente ($f(M_1)f(M_2)$) en $f(M_1)$ à l'ellipse ; mais $f(M_1)=M$ et $f(M_2)=M_2$, puisque M_2 est sur la base de f, et donc la tangente en M à l'ellipse est (MM_2).

<u>Remarque 1</u> :
A, A', M étant donnés, avec M tel que son projeté orthogonal sur (AA') soit strictement entre A et A', et M non sur [AA'], il existe une et une seule ellipse passant par A, A', M, et telle que [AA'] soit un de ses axes.
En effet dans le repère défini au début de la 1ière preuve, l'équation de l'ellipse est $x^2/OA^2+y^2/b^2=1$, et b>0 est déterminé par les coordonnées de M : $b^2=y_M^2/(1-x_M^2/OA^2)$.

<u>Remarque 2</u> :
si l'ellipse est un cercle, cad si l'ellipse est le cercle *C* de centre O passant par A, alors $M_1=M$, et ensuite la construction se réduit effectivement à la construction d'une tangente à un cercle.

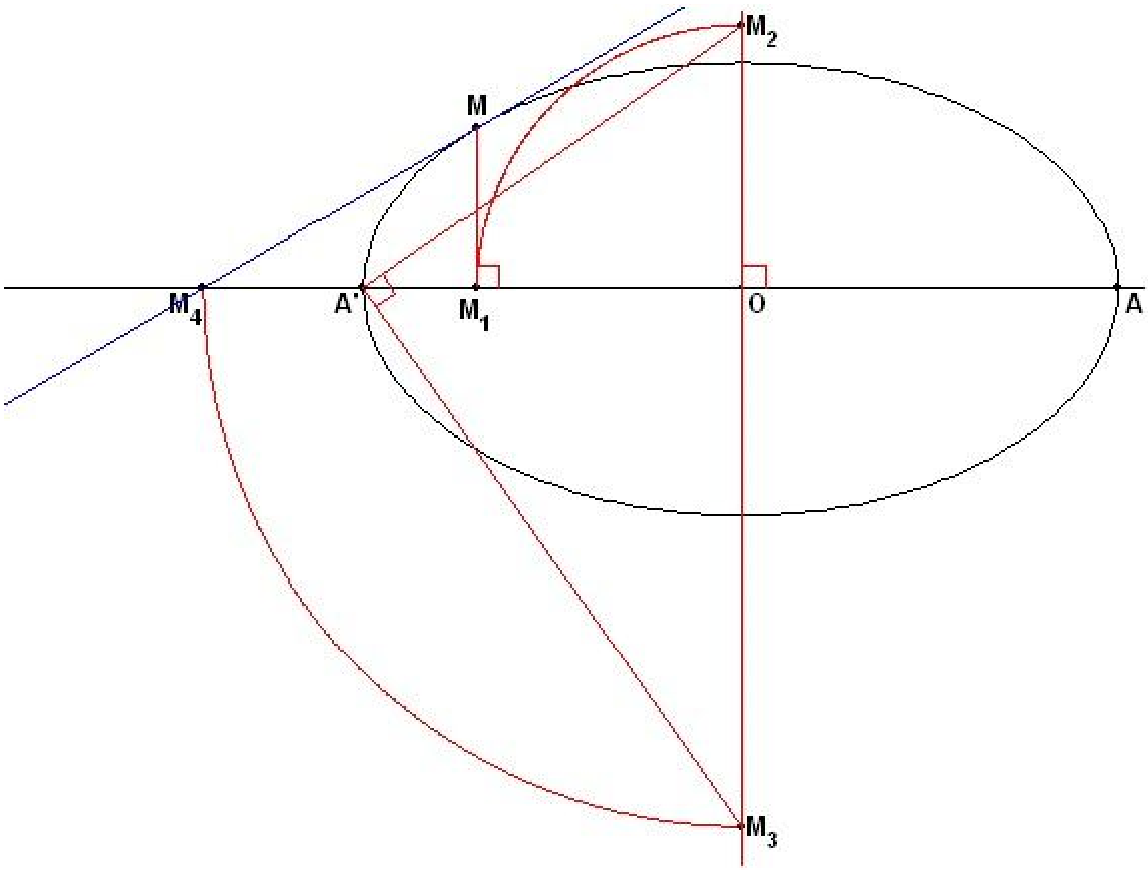
<u>Remarque 3</u> :
si M est un des quatre sommets, la construction échoue :

- si M=A' ou M=A, alors M, M_1, M_2 sont confondus et la droite (MM_2) n'est pas définie
- si M est un des deux autres sommets, la tangente à *C* en M_1 est paralléle à (AA') et M_2 n'existe pas

Mais évidemment dans ces deux cas la construction de la tangente est immédiate, puisque elle est soit perpendiculaire à (AA'), soit paralléle à (AA')!

<u>Remarque 4</u> :
f est l'application affine qui à N(x,y) fait correspondre N'(x',y') avec x'=x et y'=ky où k est la constante y_M/y_{M_1}, de sorte que $f(M_1)=M$.
On notera que puisque M n'est ni en A, ni en A', y_M et y_{M_1} sont non nuls, donc k est bien défini et non nul.
Cf ces relations entre N et N', il est immédiat de vérifier que le cercle *C* est transformé en l'ellipse de centre O, de sommets A et A' et passant par M.

II) : via 1 médiatrice, 2 perpendiculaires et 2 cercles



Voici la méthode, en connaissant toujours de l'ellipse au départ que deux de ses sommets A et A' portés par un même axe, lequel n'est pas nécessairement le grand axe, et un point M distinct d'un sommet (voir remarque ci-dessous).

Là aussi, toutes les constructions proposées se font à la règle et au compas de façon évidente :

- 0) Construcion de la droite (AA'), et de la médiatrice de [AA'], laquelle "porte" donc le 2ième axe de l'ellipse (on n'a pas besoin des deux autres sommets situés sur cet axe), et par intersection on obtient le centre O de l'ellipse
- 1) Construction du projeté orthognal M_1 de M sur (AA')
- 2) Construction du point M_2 sur la médiatrice de [AA'], du même côté de (AA') que M, et tel que $OM_2=OM_1$,
- 3) Construction de la perpendiculaire en A' au segment $[M_2A']$: elle coupe la médiatrice de [AA'] en M_3

- 4) Construction du point M_4 sur (AA'), du même côté de la médiatrice de [AA'] que M, et tel que $OM_4=OM_3$,
- 5) **La tangente en M à l'ellipse est alors la droite (MM_4)**

preuve :
cf le début de la 1ière preuve ci-dessus, il faut montrer que M_4 est le point T.

Le triangle $M_3A'M_2$ étant rectangle en A', $OA'^2=OM_2\times OM_3$, soit
$a^2=|x_0|OM_3$ et ainsi $OM_4=a^2/|x_0|$, ce qui prouve que M_4 a pour coordonnées $(a^2/x_0,0)$, donc $\mathbf{M_4=T}$.

Remarque 1 :
si l'ellipse est un cercle, on peut vérifier que (MM_4) et (MO) sont bien orthogonales.
En effet,
$MM_4^2=MM_1^2+M_4M_1^2=MM_1^2+(OM_4-OM_1)^2$
$MM_4^2=MM_1^2+OM_4^2+OM_1^2-2k=OM^2+OM_4^2-2k$, avec $k=OM_4\times OM_1$.
Mais, $k=OM_3\times OM_2=OA'^2$, et, puisque l'ellipse est un cercle, $k=OM^2$.
Finalement, $MM_4^2=OM_4^2-OM^2$, et M_4MO est bien rectangle en M.

Remarque 2 :
si, par exemple, M est en A' ou en B, autre sommet que A ou A', au dessus de (AA'), la construction échoue :

- si M=A', alors $M_1=A'$, $OM_2=OA'$et l'angle en A' du triangle $A'OM_2$ (isocèle) est $\pi/4$ donc $A'OM_3$ est aussi isocèle et $OM_3=OA'$; donc $M_4=A'$ et M_4 et M sont confondus, et ainsi la droite (MM_4) n'est pas définie
- si M=B, alors $M_1=O=M_2$ et la perpendiculaire en A' à $(M_2A')=(OA')$ est paralléle à la médiatrice de [AA'] et M_3 n'existe pas (ou envoyé à l'infini...)

Mais évidemment dans ces deux cas la construction de la tangente est immédiate, puisque elle est soit perpendiculaire à (AA'), soit paralléle à (AA')!