<- Sommaire Site

http://alain.pichereau.pages.perso-orange.fr
marc.pichereau@wanadoo.fr

Sur un vecteur aléatoire dont les trois composantes suivent des lois binomiales

A, B, C étant trois épreuves de Bernoulli de probabilités de réussite respectives p, q, r (toutes dans]0;1[), et n étant un entier ≥1, on considére l'épreuve aléatoire ***E*** suivante :

- on réalise n fois l'épreuve A : on obtient i réussites (et n-i échecs)
- puis on réalise i fois l'épreuve B : on obtient j réussites (et i-j échecs)
- puis on réalise j fois l'épreuve C : on obtient k réussites (et j-k échecs)

Le résultat associé à cette réalisation de l'épreuve ***E*** est le triplet (ou vecteur) (i,j,k).
On notera **Ω(*E*)** l'ensemble des résultats possibles de cette épreuve ***E***.

Sur **Ω(*E*)** on définit alors quatre variables aléatoires **I, J, K, V** qui sont les quatre applications de **Ω(*E*)** dans N ou dans N^3 suivantes :

- **I**((i,j,k))=i
- **J**((i,j,k))=j
- **K**((i,j,k))=k
- **V**((i,j,k))=(i,j,k) ; donc **V**=(**I**,**J**,**K**)

On a alors les quatre résultats suivants :

- **1)** Le nombre de résultats possibles de l'épreuve ***E***, cad card(**Ω(*E*)**), est le nombre N de triplets (i,j,k) tels que $n\geq i\geq j\geq\geq k\geq 0$: $N=C_{n+3}^{3}=(n+1)(n+2)(n+3)/6$.

  Remarque
  Si n=1 alors N=4, les quatre résultats possibles étant (1,1,1) (1,1,0) (1,0,0) (0,0,0)
  Si n=2 alors N=10, les dix résultats possibles étant (2,2,2) (2,2,1) (2,2,0) (2,1,1) (2,1,0) (2,0,0) (1,1,1) (1,1,0) (1,0,0) (0,0,0)

- **2)** Pour (i,j,k) dans **Ω(*E*)** on pose P(i,j,k)=P(**V**=(i,j,k)) :
  $P(i,j,k)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$.
  Remarque 1 : le produit $C_n^i\times C_i^j\times C_j^k$ peut s'écrire n!/((n-i)!(i-j)!(j-k)!k!)) et comme (n-i)+(i-j)+(j-k)+k=n, ce produit est ce qu'on appelle un coefficient multimonial : il intervient dans la loi multinomiale, mais ici **V** ne suit pas une telle loi.
  Remarque 2 :

  $P(0,0,0)=(1-p)^n$
  $P(1,0,0)=np(1-p)^{n-1}(1-q)$
  $P(1,1,0)=npq(1-p)^{n-1}(1-r)$
  $P(1,1,1)=npqr(1-p)^{n-1}$

- **3) I, J , K sont des variables aléatoires réelles (définies sur *E*) à valeurs dans {0;1;...;n} et toutes les trois suivent une loi binomiale** :

- **I** suit une loi binomiale de paramètres n et p, donc sa moyenne est np, son écart-type est $\sqrt{(np(1-p))}$
- **J** suit une loi binomiale de paramètres n et pq, donc sa moyenne est npq, son écart-type est $\sqrt{(npq(1-pq))}$
- **K** suit une loi binomiale de paramètres n et pqr, donc sa moyenne est npqr, son écart-type est $\sqrt{(npqr(1-pqr))}$

Vérifions ici, tout de suite, dans le cas n=2, que K suit bien une loi binomiale de paramètres 2 et pqr.
Cf le 2) on a :

(i,j,k)	P(i,j,k)
(2,2,2)	$p^2q^2r^2$
(2,2,1)	$2p^2q^2r(1-r)$
(2,2,0)	$p^2q^2(1-r)^2$
(2,1,1)	$2p^2qr(1-q)$
(2,1,0)	$2p^2q(1-q)(1-r)$
(2,0,0)	$p^2(1-q)^2$
(1,1,1)	$2pqr(1-p)$
(1,1,0)	$2pq(1-p)(1-r)$
(1,0,0)	$2p(1-p)(1-q)$
(0,0,0)	$(1-p)^2$

D'où

- P(**K**=0)=$p^2q^2(1-r)^2+2p^2q(1-q)(1-r)+p^2(1-q)^2+2p(1-p)q(1-r)+2p(1-p)(1-q)+(1-p)^2$
  P(**K**=0)=$p^2(q(1-r)+(1-q))^2+2p(1-p)(1-qr)+(1-p)^2$
  P(**K**=0)=$p^2(1-qr)^2+2p(1-p)(1-qr)+(1-p)^2$
  P(**K**=0)=$(p(1-qr)+(1-p))^2=\mathbf{(1-pqr)^2}$
- P(**K**=1)=$2p^2q^2r(1-r)+2p^2q(1-q)r+2p(1-p)qr$
  P(**K**=1)=$2pqr(pq(1-r)+p(1-q)+(1-p))=\mathbf{2pqr(1-pqr)}$
- P(**K**=2)=$\mathbf{(pqr)^2}$

- **4) I, J, K** sont des variables aléatoires qui ne sont pas indépendantes mutuellement, ni 2 à 2, et leurs covariances sont
  - cov(**I,J**)=npq(1-p)
  - cov(**I,K**)=npqr(1-p)
  - cov(**J,K**)=npqr(1-pq)

Remarque 1 : la covariance de deux variables aléatoires réelles X et Y est E((X-E(X))(Y-E(Y))=E(XY)-E(X)E(Y), E **étant l'opérateur espérance mathématique**. Cette covariance est nulle si X et Y sont indépendantes et la covariance de X et X est la variance de X.
Remarque 2 : **V=(I,J,K)** étant considérée ici comme la matrice ligne **(I J K)**, sa matrice de covariance **Δ** est définie par
$E({}^t(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))(\mathbf{V}-E(\mathbf{V})))=E({}^t\mathbf{V}\mathbf{V})-{}^tE(\mathbf{V})E(\mathbf{V})$ où ${}^tM$ est la transposée de la matrice M.
Cette matrice de covariance (écrite sous forme de tableau, cf je tape en html) est

cov(**I**,**I**)	cov(**I**,**J**)	cov(**I**,**K**)
cov(**J**,**I**)	cov(**J**,**J**)	cov(**J**,**K**)
cov(**K**,**I**)	cov(**K**,**J**)	cov(**K**,**K**)

Cette matrice **Δ** est évidemment symétrique et elle est définie positive.
Donc ses trois valeurs propres sont réelles et strictement positives.
En outre, elles sont proportionnelles à n.

Le déterminant de **Δ** est $\mathbf{n^3p^3q^2r(1-p)(1-q)(1-r)>0}$.

On verra dans la preuve de ce 4) une approximation des valeurs propres de **Δ**, dans le cas particulier p=q=r=0.5.

- **5)** ***i*** étant un des deux nombres complexes dont le carré est -1, < . > désignant le produit scalaire canonique dans R^3, et $T=(t_1, t_2,t_3)$ étant un élément quelconque de R^3, la fonction caractéristique de **V** définie par
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=E(\exp(\boldsymbol{i}<T.\mathbf{V}>))=E(\exp(\boldsymbol{i}(t_1\mathbf{I}+t_2\mathbf{J}+t_3\mathbf{K})))=\sum_{i,j,k/\ 0\leq k\leq j\leq i\leq n}\exp(\boldsymbol{i}(t_1i+t_2j+t_3k))P(i,j,k)$ est
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p(1-q)\exp(\boldsymbol{i}t_1)+pq(1-r)\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2))+pqr\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2+t_3))]^n$.

  Remarque : en remplacant successivement (t_1,t_2,t_3) par (t,0,0), (0,t,0), (0,0,t), on retrouve tout de suite les résultats de 3) puisque la fonction caractéristique d'une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale de paramètres n et p est $E(\exp(\boldsymbol{i}tX))=(1-p+p\exp(\boldsymbol{i}t))^n$.

Applications (et origine) de cette étude

Application 1.

Récemment (fin 2011), une entreprise, après modélisation de son problème, a considéré l'épreuve aléatoire ***E*** ci-dessus, son but étant de déterminer, à p, q, r fixés, le plus petit entier n tel que $P(\mathbf{K}\geq 1)\geq 90\%$.
Dans un premier temps elle a utilisé la méthode approchée (trop) décrite à l'annexe 2 ci-dessous.

En fait, on déduit tout de suite du 3) ci-dessus, que

$$\boxed{P(\mathbf{K}\geq 1)=1-(1-pqr)^n}$$

et donc
à p, q, r fixés, le plus petit entier n tel que P(K≥1)≥s (avec s dans [0;1[) est le plus petit entier n tel que n≥ln(1-s)/ln(1-pqr).
Deux cas sont à envisager :

- soit ln(1-s)/ln(1-pqr) n'est pas un entier, et ce plus petit entier n est la partie entière de ln(1-s)/ln(1-pqr) augmentée de 1,
- soit 1-s est une puissance entière positive de 1-pqr, et ce plus petit entier est ln(1-s)/ln(1-pqr) lui-même.

Exemples

- si pqr=0.5×0.5×0.5=0.125 et si s=90%, alors ln0.1/ln0.875=17.24... et le plus petit entier n cherché est 18.
- si pqr=0.8×0.4×0.8=0.256 et si s=90%, alors ln0.1/ln0.744=7.78... et le plus petit entier n cherché est 8.

Remarque : vérification de la formule $P(\mathbf{K}\geq 1)=1-(1-pqr)^n$.

- n=1, alors $P(\mathbf{K}\geq 1)=P(1,1,1)=pqr=1-(1-pqr)^1$
- n=2, p=q=r=0.5
    - il y a 10 résultats possibles dont 4 avec k≥1 : voir leur liste au 1)
    - $P(i,j,k)=C_2^iC_i^jC_j^k(1/2)^{2+i+j}$
    - $P(\mathbf{K}\geq 1)=P(2,2,2)+P(2,2,1)+P(2,1,1)+P(1,1,1)$
      $P(\mathbf{K}\geq 1)=(1/2)^6+2(1/2)^6+2(1/2)^5+2(1/2)^4=(3+4+8)/2^6=15/64$, alors que
      $1-(1-pqr)^2=1-(1-1/8)^2=1-(7/8)^2=15/64$.

Application 2.

La réalisation pratique des épreuves aléatoires A,B,C ayant des coûts respectifs C_A, C_B, C_C, l'entreprise a cherché à savoir combien allait lui coûter "la" réalisation de ***E***.
Ce coût n'est évidemment pas le même à chaque réalisation de ***E*** :
si (i,j,k) est le résultat obtenu lors d'une réalisation de ***E***, c'est qu'il y a eu, outre n réalisations de A, i réalisations de B et j réalisations de C et le coût total de cette réalisation de ***E*** est
$nC_A+iC_B+ jC_C$
, qui ne dépend évidemment pas de k.
Ce coût varie entre deux valeurs extrêmes, selon le résultat de ***E*** obtenu :

- si (i,j,k)=(n,n,k), la probabilité d'un tel résultat étant $P(n,n,k)=p^nq^nC_n^kr^k(1-r)^{n-k}$, le coût obtenu est maximum : $n(C_A+C_B+ C_C)$
- si (i,j,k)=(0,0,0), la probabilité d'un tel résultat étant $P(0,0,0)=(1-p)^n$, le coût obtenu est cette fois minimum : nC_A

En fait ce coût est la variable aléatoire **C** définie sur **Ω(*E*)** par $\mathbf{C}=nC_A+\mathbf{I}C_B+ \mathbf{J}C_C$.
cad $\mathbf{C}(i,j,k)=nC_A+iC_B+ jC_C$.

Sachant que l'entreprise cherche à réaliser une seule fois ***E***, avec n assez grand pour lui assurer une forte probabilité que **K** prenne une valeur ≥1, quel coût doit-elle prévoir?
Le plus réaliste est de prévoir que ce coût sera **l'espérance mathématique ou coût moyen de la variable aléatoire C**, quantité notée E(**C**).
C'est la somme de tous les coûts possibles, chaque coût étant pondéré par sa probabilité d'obtention :
$E(\mathbf{C})=\sum_{i,j,k/\ 0\leq k\leq j\leq i\leq n}P(i,j,k)\mathbf{C}(i,j,k)$.
Mais l'opérateur espérance E étant linéaire, notamment l'espérance d'une somme est la somme des

espérances, on obtient
$E(\mathbf{C})=E(nC_A+\mathbf{I}C_B+\mathbf{J}C_C)=nC_A+E(\mathbf{I})C_B+E(\mathbf{J})C_C$, soit, en utilisant le 3) ci-dessus

$$E(\mathbf{C})=n(C_A+pC_B+pqC_C)$$

Ce coût moyen (ou espérance du coût) est proportionnel à n.

Par exemple, dans le cas p=0.8, q=0.4, r=0.8,

si on passe de n=8 à n=9,
- le coût moyen va augmenter de 12.5%,
- alors que $P(\mathbf{K}\geq 1)$ va augmenter de 2.6% (cette probabilité passant de $1-(1-pqr)^8\approx 0.906$ à $1-(1-pqr)^9\approx 0.93$

Compte tenu de ces éléments, c'est alors à l'entreprise de choisir entre n= 8 et n=9.

Preuves

preuve de 1

Si (i,j,k) est un résultat possible de ***E***, nécessairement $n\geq i\geq j\geq k\geq 0$; mais réciproquement, tout triplet (i,j,k) tel que $n\geq i\geq j\geq k\geq 0$ est évidemment un résultat possible de ***E***.
Il s'agit donc de déterminer le nombre N de triplets (ou vecteurs à 3 composantes) (i,j,k) avec $n\geq i\geq j\geq k\geq 0$.

<u>1ière méthode</u> ("directe")
Pour cela, on partitionne ces triplets en trois catégories : soit i=j=k, soit $i=j\neq k$ ou $i\neq j=k$, soit i>j>k.

- il y a n+1 triplets avec i=j=k
- il y C_{n+1}^2 triplets avec $i=j\neq k$ et autant avec $i\neq j=k$, soit en tout $2C_{n+1}^2=(n+1)n$
- si n=1 il n'y a aucun triplet tel que i>j>k, mais si $n\geq 2$ il y en a C_{n+1}^3=nombre de choix de trois éléments distincts appartenant à {0;1;...;n}, puisque trois éléments distincts étant choisis, il n'y a qu'une façon de les ordonner ; donc si $n\geq 2$ il y a (n+1)n(n-1)/6 triplets tels que i>j>k. Mais pour n=1, (n+1)n(n-1)/6 est nul et donc dans tous les cas ($n\geq 1$) il y a (n+1)n(n-1)/6 triplets avec i>j>k
- Finalement N=n+1+(n+1)n+(n+1)n(n-1)/6,
  soit $N=(n+1)(6+6n+n^2-n)/6=(n+1)(n^2+5n+6)/6=(n+1)(n+2)(n+3)/6=C_{n+3}^3$.

<u>2ième méthode</u> : on va se ramener à un résultat classique de dénombrement.
Soit f l'application qui au triplet (i,j,k) avec $n\geq i\geq j\geq k\geq 0$ associe le quadruplet (y_1, y_2, y_3, y_4) avec

- $y_1=n-i$
- $y_2=i-j$
- $y_3=j-k$
- $y_4=k$

f est évidemment injective.
On remarque que les y_i sont des entiers tous ≥ 0 et leur somme est n ; et étant donné un tel quadruplet, cad (y_1, y_2, y_3, y_4) avec $y_i\geq 0$ et $\sum y_i=n$, il existe un triplet (i,j,k) vérifiant

$n\geq i\geq j\geq k\geq 0$ et dont l'image par f est justement ce quadruplet.
En effet, pour cela on prend :

- $i=n-y_1$: on a bien $n\geq i$
- $j=i-y_2$: on a bien $i\geq j$
- $k=j-y_3$: on a bien $j\geq k$

Et par sommation de ces trois égalité $k=n-y_1-y_2-y_3=y_4\geq 0$.
f est donc une bijection de l'ensemble des triplets (i,j,k) avec $n\geq i\geq j\geq k\geq 0$ vers l'ensemble des quadruplets d'entiers positifs ou nuls (y_1, y_2, y_3, y_4) tels que $\sum_i y_i=n$.
Le nombre N de triplets (i,j,k) tels que $n\geq i\geq j\geq k\geq 0$ est donc le nombre de quadruplets d'entiers positifs ou nuls (y_1, y_2, y_3, y_4) tels que $\sum_i y_i=n$: cf un résultat classique il y en a $C_{n+4-1}^{4-1}=C_{n+3}^{3}$.

preuve de 2

La formule des probabilités conditionnnelles $P(A/B)P(B)=P(A \cap B)$ donne
$P(i,j,k)=P(\mathbf{I}=i \cap \mathbf{J}=j \cap \mathbf{K}=k)=P(\mathbf{I}=i)P(\mathbf{J}=j/\mathbf{I}=i)P(\mathbf{K}=k/(\mathbf{I}=i \cap \mathbf{J}=j)$
Or

- **I** suit évidemment, (cf sa définition), une loi binomiale de paramètres n et p, donc $P(\mathbf{I}=i)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}$
- i étant fixé, le nombre de réussites d'épreuves B suit une loi binomiale de paramètres i et q, donc $P(\mathbf{J}=j/\mathbf{I}=i)=C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
- i et j étant fixés, le nombre de réussites d'épreuves C suit une loi binomiale de paramètres j et r, donc $P(\mathbf{K}=k/(\mathbf{I}=i \cap \mathbf{J}=j))=C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$

d'où $P(i,j,k)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$

<u>Remarque</u> : on peut vérifier sans difficulté que la somme S des N probabilités P(i,j,k) est bien 1, cela à partir du fait que $\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq m} C_m^i\times s^i\times(1-s)^{n-i}=(s+(1-s))^m=1$.

Cf les six premiers facteurs de P(i,j,k) ne dépendent pas de k cette somme est
$S=\sum_{i,j/\ 0\leq j\leq i\leq n} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times(\sum_{0\leq k\leq j} C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k})$
$S=\sum_{i,j/\ 0\leq j\leq i\leq n} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
$S=\sum_{i/\ 0\leq i\leq n} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times(\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i} C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j})$
$S=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}=1$

preuve de 3
<u>Vérifions que **I** suit une loi binomiale de paramètres n et p</u> (puisque ce résultat est évident cf la définition de **I**).

Il s'agit de vérifier que pour tout i dans {0;1;...;n} on a $P(\mathbf{I}=i)=C_n^i p^i(1-p)^{n-i}$.
$P(\mathbf{I}=i)=\sum_{j,k\ /\ 0\leq k\leq j\leq i} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$P(\mathbf{I}=i)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j,k\ /\ 0\leq k\leq j\leq i} C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$P(\mathbf{I}=i)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i} C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times(\sum_{k\ /\ 0\leq k\leq j} C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k})$
$P(\mathbf{I}=i)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i} C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
$P(\mathbf{I}=i)=C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}$

<u>Montrons que **J** suit une loi binomiale de paramètres n et pq</u> : là c'est moins évident.

Il s'agit de montrer que pour tout j dans {0;1;...;n} on a $P(\mathbf{J}=j)=C_n^j(pq)^j(1-pq)^{n-j}$.
$P(\mathbf{J}=j)=\sum_{i,k\ /\ 0\leq k\leq j\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$P(\mathbf{J}=j)=\sum_{i\ /\ j\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times\sum_{k/\ 0\leq k\leq j}C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$P(\mathbf{J}=j)=\sum_{i\ /\ j\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
$P(\mathbf{J}=j)=p^jq^j\sum_{i\ /\ 0\leq i-j\leq n-j}C_n^iC_i^j(p(1-q))^{i-j}(1-p)^{n-j-(i-j)}$
Mais $C_n^iC_i^j=C_n^jC_{n-j}^{i-j}$
D'où en sortant le C_n^j du $\sum$ ci-dessus on obtient
$P(\mathbf{J}=j)=p^jq^jC_n^j\sum_{i\ /\ 0\leq i-j\leq n-j}C_{n-j}^{i-j}(p(1-q))^{i-j}(1-p)^{n-j-(i-j)}$
$P(\mathbf{J}=j)=p^jq^jC_n^j(p(1-q)+(1-p))^{n-j}$, ce qui donne
$P(\mathbf{J}=j)=C_n^j(pq)^j(1-pq)^{n-j}$

Montrons que **K** suit une loi binomiale de paramètres n et pqr : là aussi c'est moins évident.

Il s'agit de montrer que pour tout k dans {0;1;...;n} on a $P(\mathbf{K}=k)=C_n^k(pqr)^k(1-pqr)^{n-k}$.
$P(\mathbf{K}=k)=\sum_{i,j\ /\ k\leq j\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$P(\mathbf{K}=k)=r^k\sum_{i\ /\ k\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ k\leq j\leq i}C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times C_j^k\times(1-r)^{j-k}$
Mais $C_i^jC_j^k=C_i^kC_{i-k}^{j-k}=C_i^kC_{i-k}^{i-j}$, d'où
$P(\mathbf{K}=k)=r^kq^k\sum_{i\ /\ k\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^k\sum_{j\ /\ 0\leq j-k\leq i-k}C_{i-k}^{j-k}\times(q(1-r))^{j-k}\times(1-q)^{i-k-(j-k)}$
$P(\mathbf{K}=k)=r^kq^k\sum_{i\ /\ k\leq i\leq n}C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^k(q(1-r)+(1-q))^{i-k}$
Et $C_n^iC_i^k=C_n^kC_{n-k}^{i-k}$ donne
$P(\mathbf{K}=k)=r^kq^kC_n^k\sum_{i\ /\ k\leq i\leq n}C_{n-k}^{i-k}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times(1-qr)^{i-k}$
$P(\mathbf{K}=k)=p^kr^kq^kC_n^k\sum_{i\ /\ 0\leq i-k\leq n-k}C_{n-k}^{i-k}\times(p(1-qr))^{i-k}\times(1-p)^{n-k-(i-k)}$
$P(\mathbf{K}=k)=p^kr^kq^kC_n^k(p(1-qr)+(1-p))^{n-k}$, ce qui donne
$P(\mathbf{K}=k)=C_n^k(pqr)^k(1-pqr)^{n-k}$

preuve de 4

$P(\mathbf{I}=n\cap\mathbf{J}=n\cap\mathbf{K}=n)=P(n,n,n)=(pqr)^n\neq P(\mathbf{I}=n)P(\mathbf{J}=n)P(\mathbf{K}=n)=p^n(pq)^n(pqr)^n$: donc **les variables aléatoires I, J, K ne sont pas indépendantes mutuellement**. On verra en outre, ci-dessous, qu'elles ne sont pas indépendantes 2 à 2.

Cf les espérances de **I**, **J**, **K** sont connues, il y a juste à calculer celles de **IJ**, **IK**, **JK**

On sera amener à utiliser les résultats suivants : si X suit une loi binomiale de paramètres m et s, alors

- R1 : son espérance est $E(X)=\sum_{v\ /\ 0\leq v\leq n}vC_m^vs^v(1-s)^{m-v}=ms$
- R2 : $E(X^2)=\sum_{v\ /\ 0\leq v\leq n}v^2C_m^vs^v(1-s)^{m-v}=ms(1-s)+m^2s^2$, ce qui donne comme variance de X : $E(X^2)-(E(X))^2=ms(1-s)$

Covariance de **I** et **J**

$E(\mathbf{IJ})=\sum_{i,j,k\ /\ 0\leq k\leq j\leq i\leq n}ijP(i,j,k)$
$E(\mathbf{IJ})=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n}ijC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times\sum_{k\ /\ 0\leq k\leq j}C_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$E(\mathbf{IJ})=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n}ijC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
$E(\mathbf{IJ})=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n}iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i}jC_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$

$E(\mathbf{IJ})=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times(iq)$, d'après R1 et donc
$E(\mathbf{IJ})=qE(\mathbf{I}^2)$, ce qui donne cf R2
$E(\mathbf{IJ})=q(np(1-p)+n^2p^2)$ et
$cov(\mathbf{I},\mathbf{J})=E(\mathbf{IJ})-E(\mathbf{I})E(\mathbf{J})=q(np-np^2+n^2q^2)-np\times npq=npq(1-p)$
Cette covariance étant non nulle, **I** et **J** ne sont pas indépendantes

<u>Covariance de **I** et **K**</u>

$E(\mathbf{IK})=\sum_{i,j,k\ /\ 0\leq k\leq j\leq i\leq n} ikP(i,j,k)$
$E(\mathbf{IK})=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n} iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times\sum_{k\ /\ 0\leq k\leq j} kC_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$E(\mathbf{IK})=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n} iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times(jr)$ d'après R1 et donc
$E(\mathbf{IK})=r\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i} jC_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
$E(\mathbf{IK})=r\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times(iq)$ d'après R1 et
$E(\mathbf{IK})=rq\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} i^2C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}$
$E(\mathbf{IK})=rqE(\mathbf{I}^2)=rq(np(1-p)+n^2p^2)$
$cov(\mathbf{I},\mathbf{K})=E(\mathbf{IK})-E(\mathbf{I})E(\mathbf{K})=rq(np-np^2+n^2q^2)-np\times npqr=npqr(1-p)$
Cette covariance étant non nulle, **I** et **K** ne sont pas indépendantes

<u>Covariance de **J** et **K**</u>

$E(\mathbf{JK})=\sum_{i,j,k\ /\ 0\leq k\leq j\leq i\leq n} jkP(i,j,k)$
$E(\mathbf{JK})=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n} jC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times\sum_{k\ /\ 0\leq k\leq j} kC_j^k\times r^k\times(1-r)^{j-k}$
$E(\mathbf{JK})=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n} jC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times(jr)$ d'après R1 et
$E(\mathbf{JK})=r\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i} j^2C_i^j\times q^j\times(1-q)^{i-j}$
$E(\mathbf{JK})=r\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times(iq(1-q)+i^2q^2)$ d'après R2 et
$E(\mathbf{JK})=r[q(1-q)\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} iC_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}+q^2\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n} i^2C_n^i\times p^i\times(1-p)^{n-i}]$
$E(\mathbf{JK})=r[q(1-q)np+q^2(np(1-p)+n^2p^2]$
$E(\mathbf{JK})=r(npq(1-pq)+(npq)^2)$; c'est $rE(\mathbf{J}^2)$!
$cov(\mathbf{J},\mathbf{K})=E(\mathbf{JK})-E(\mathbf{J})E(\mathbf{K})=r(npq(1-pq)+(npq)^2)-npq\times npqr=npqr(1-pq)$
Cette covariance étant non nulle, **J** et **K** ne sont pas indépendantes

<u>Matrice de covariance de **V**, **V** étant considérée comme matrice ligne</u>

La définition donnée en remarque 2 de l'énoncé permet de dire tout de suite que cette matrice de covariance est la matrice **Δ** symétrique suivante (écrite sous forme de tableau) :

np(1-p)	npq(1-p)	npqr(1-p)
npq(1-p)	npq(1-pq)	npqr(1-pq)
npqr(1-p)	npqr(1-pq)	npqr(1-pqr)

Elle est factorisable par np.

Montrons que **Δ** est définie positive.
Soit x une matrice colonne à trois éléments, tous réels : x est une "constante".
${}^tx\mathbf{\Delta}x=E({}^tx[{}^t(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))]x)$
${}^tx\mathbf{\Delta}x=E([{}^tx{}^t(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))][(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))x])$
${}^tx\mathbf{\Delta}x=E(z^2)$, **z** étant la variable aléatoire réelle ${}^tx{}^t(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))=(\mathbf{V}-E(\mathbf{V}))x$.
Donc pour tout x, ${}^tx\mathbf{\Delta}x\geq 0$: **Δ** est positive.

Il faut montrer maintenant que si $x \neq 0$, ${}^t x \mathbf{\Delta} x > 0$.
Suposons que ${}^t x \mathbf{\Delta} x = 0$, cad que $E(\mathbf{z}^2)=0$:
cela équivaut à **z** est la variable aléatoire ne pouvant prendre qu'une valeur avec une probabilité non nulle : c'est la valeur 0, prise avec la probabilité 1.
En effet si **z** prend une valeur non nulle avec une probabilité non nulle, alors $E(\mathbf{z})>0$.
En notant ${}^t x=(x_1\ x_2\ x_3)$, $\mathbf{z}=x_1(\mathbf{I}-E(\mathbf{I}))+x_2(\mathbf{J}-E(\mathbf{J}))+x_3(\mathbf{K}-E(\mathbf{K}))$,
soit $\mathbf{z}=x_1\mathbf{I}+x_2\mathbf{J}+x_3\mathbf{K}-r$ avec $r=x_1E(\mathbf{I})+x_2E(\mathbf{J})+x_3E(\mathbf{K})$.
D'où

si V prend la valeur (1,1,1), **z** prend la valeur $x_1+x_2+x_3-r$
si V prend la valeur (1,1,0), **z** prend la valeur x_1+x_2-r
si V prend la valeur (1,0,0), **z** prend la valeur x_1-r
si V prend la valeur (0,0,0), **z** prend la valeur $-r$

Or, cf la remarque du 2), la probabilité que **z** prenne chacune de ces quatre valeurs est non nulle, donc **z** ne pouvant prendre que la valeur 0 avec une probabilité non nulle, c'est que r=0, puis $x_1=x_2=x_3=0$, soit x=0.
Donc on a montré ${}^t x \mathbf{\Delta} x=0 \Rightarrow x=0$, cad $x \neq 0 \Rightarrow {}^t x \mathbf{\Delta} x>0$: **Δ est bien définie positive**.

Pour calculer son déterminant (qui doit être >0 puisque cette matrice de covariance est définie-positive), on commence évidemment par la mise en facteur de np, puis on factorise 1-p dans la 1ière ligne, q dans la seconde et qr dans la 3ième.
Ainsi $\det(\mathbf{\Delta})=(np)^3q^2r(1-p)\det(\mathbf{\Delta'})$ avec **Δ'** la matrice ci-dessous

1	q	qr
1-p	1-pq	r(1-pq)
1-p	1-pq	1-pqr

En ajoutant aux 2ième et 3ième lignes la 1ière multipliée par p, on obtient que det(**Δ'**) est le déterminant de la matrice ci-dessous

1	q	qr
1	1	r
1	1	1

Sarrus donne alors tout de suite $\det(\mathbf{\Delta'})=1+2qr-qr-r-q=1-r-q+qr=(1-q)(1-r)$.
Finalement **le déteminant de Δ est $\det(\mathbf{\Delta})=n^3p^3q^2r(1-p)(1-q)(1-r)>0$**.

Quant aux valeurs propres de la matrice de covariance **Δ**, ce sont les valeurs propres de $\mathbf{\Delta''}=(1/np)\mathbf{\Delta}$, multipliées par np.
Comme **Δ''** ne dépend pas de n, les valeurs propres de **Δ''** ne dépendent pas aussi de n, donc **les valeurs propres de Δ sont proportionnelles à n**.

<u>Remarque</u> : dans le cas p=q=r=0.5, la matrice **Δ''** est

1/2	1/4	1/8
1/4	3/8	3/16

1/8	3/16	7/32

Son polynôme caractéristique est $-X^3+(35/32)X^2-(17/64)X+1/64$.
Δ'', donc Δ, n'admettent aucune valeur propre rationnelle car si a/b est racine de ce polynôme caractéristique, avec a et b dans Z et premiers entre eux, alors
$-64a^3+70a^2b-17ab^2+b^3=0$; donc a doit diviser b, soit $|a|=1$, et b doit diviser 64.
Les seules possibilités pour une racine rationnelle sont alors $\pm 2^{-i}$ pour i=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 : aucune n'est effectivement racine.
En fait les valeurs propres de **Δ''** sont approximativement 0.77823, 0.22712, 0.0884 et donc les valeurs propres de la matrice de covariance **Δ** sont approximativement
$(n/2)\times 0.77823$, $(n/2)\times 0.22712$, $(n/2)\times 0.0884$.
Leur somme est, approximativement $(n/2)\times 1.09375$, ce qui était attendu car la trace de la matrice de covariance, qui est la somme de ses termes diagonaux, cad la somme des variances de **I**, **J**, **K** est, $np(1-p+q(1-pq)+qr(1-pqr))=(n/2)\times(35/32)=(n/2)\times 1.09375$.
Et leur produit est approximativement $0.0156248(n/2)^3$, ce qui là aussi était attendu, puisque le déterminant de **Δ** est $n^3/2^9=0.015625(n/2)^3$.

preuve de 5

$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n}\exp(\boldsymbol{i}t_1 i)\exp(\boldsymbol{i}t_2 j)C_n^{\,i}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^{\,j}\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times\sum_{k\ /\ 0\leq k\leq j}C_j^{\,k}\times(r\exp(\boldsymbol{i}t_3))^k\times(1-r)^{j-k}$
Et par utilisations successives de la formule du binôme,
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i,j\ /\ 0\leq j\leq i\leq n}\exp(\boldsymbol{i}t_1 i)\exp(\boldsymbol{i}t_2 j)C_n^{\,i}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times C_i^{\,j}\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times(1-r+r\exp(\boldsymbol{i}t_3))^j$
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n}\exp(\boldsymbol{i}t_1 i)C_n^{\,i}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i}\exp(\boldsymbol{i}t_2 j)C_i^{\,j}\times q^j\times(1-q)^{i-j}\times(1-r+r\exp(\boldsymbol{i}t_3))^j$
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n}\exp(\boldsymbol{i}t_1 i)C_n^{\,i}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times\sum_{j\ /\ 0\leq j\leq i}C_i^{\,j}\times((1-r)\exp(\boldsymbol{i}t_2)+r\exp(\boldsymbol{i}(t_2+t_3)))^j q^j\times(1-q)^{i-j}$
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n}\exp(\boldsymbol{i}t_1 i)C_n^{\,i}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times(1-q+q(1-r)\exp(\boldsymbol{i}t_2)+qr\exp(\boldsymbol{i}(t_2+t_3)))^i$
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n}C_n^{\,i}\times p^i\times(1-p)^{n-i}\times((1-q)\exp(\boldsymbol{i}t_1)+q(1-r)\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2))+qr\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2+t_3)))^i$
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=\sum_{i\ /\ 0\leq i\leq n}C_n^{\,i}\times(p(1-q)\exp(\boldsymbol{i}t_1)+pq(1-r)\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2))+pqr\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2+t_3)))^i(1-p)^{n-i}$
$\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p(1-q)\exp(\boldsymbol{i}t_1)+pq(1-r)\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2))+pqr\exp(\boldsymbol{i}(t_1+t_2+t_3))]^n$

On vérifie

- si $T=(0,0,0)$, $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p(1-q)+pq(1-r)+pqr]^n=1$
- si $T=(t,0,0)$, $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p(1-q)\exp(\boldsymbol{i}t_1)+pq(1-r)\exp(\boldsymbol{i}t_1)+pqr\exp(\boldsymbol{i}t_1)]^n$
  soit $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p\exp(\boldsymbol{i}t_1)]^n$, qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p
- si $T=(0,t,0)$, $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p(1-q)+pq(1-r)\exp(\boldsymbol{i}t_2)+pqr\exp(\boldsymbol{i}t_2)]^n$
  soit $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-pq+pq\exp(\boldsymbol{i}t_2)]^n$, qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et pq
- si $T=(0,0,t)$, $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-p+p(1-q)+pq(1-r)+pqr\exp(\boldsymbol{i}t_3)]^n$
  soit $\varphi_{\mathbf{V}}(T)=[1-pqr+pqr\exp(\boldsymbol{i}t_3)]^n$, qui est la fonction caractéristique d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et pqr

---

Annexe 1

Calcul numérique en ligne de P(K≥1)

N'ayant pas vu tout de suite, comme "l'entreprise", que $P(\mathbf{K}\geq 1)$ est en fait égal à $1-(1-pqr)^n$, je m'étais "amusé" à programmer un calcul numérique en ligne de $P(\mathbf{K}\geq 1)$ à partir du fait que cette

probabilité est évidemment la somme des P(i,j,k), sommation prise sur les (i,j,k) tels que $n \geq i \geq j \geq k \geq 1$.
Comme pratiquement il n'y a que moi qui me lit, je garde ce module en souvenir ...

Rentrer les quatre données dans les champs ci-dessous :

<== mettre dans ce champ la valeur de $n \geq 1$

<== mettre dans ce champ la valeur de p (un point pour la virgule : par exemple 0.8)

<== mettre dans ce champ la valeur de q

<== mettre dans ce champ la valeur de r

et lancez le calcul en cliquant sur le bouton ...lancement du calcul de $P(K \geq 1)$!

Le calcul de la somme des P(i,j,k) concernés est fait avec un petit programme en Java-Script, lequel doit donc être activé dans votre navigateur.

Lancement du calcul de $P(K \geq 1)$

Valeur de $P(K \geq 1)$

Et bien entendu rien n'empêche de rentrer un autre jeu de données (on peut ne modifier qu'une des données).

Application : ce petit module de calcul permet d'obtenir très rapidement, en quelques clics, le plus petit entier n (à p,q,r donnés) tels que $P(K \geq 1) \geq 0.9$ (par exemple) :

- si p=q=r=0.5 ce plus petit entier n est 18
- si p=0.8, q=0.4, r=0.8 ce plus petit entier est 8.

Note :
ce module de calcul a été testé dans les cas suivants (ne pas hésiter à m'écrire en cas de problème : adresse sur la page d'accueil) :

- pour n=1, $P(\mathbf{K} \geq 1)=pqr$, ce que donne bien le programme avec tous les cas testés.
- pour n=2, p=q=r=0.5, $P(\mathbf{K} \geq 1)=1-(1-0.5\times0.5\times0.5)^2=1-(7/8)^2=15/64=0.234375$, ce que donne bien le programme.
- pour n=2, p=0.8, q=0.4, r=0.8, $P(\mathbf{K} \geq 1)=1-(1-0.8\times0.4\times0.8)^2=6976/15625=0.446464$, ce que donne bien le programme.

Annexe 2 retour

Sur une approximation du plus petit entier n (à p, q, r fixés) tel que lorsqu'on réalise l'épreuve ci-dessus, on ait $P(K \geq 1) \geq 0.9$ (par exemple)

Ce plus petit entier n (à p, q, r fixés) tel que lorsqu'on réalise l'épreuve ***E*** ci-dessus, on ait $P(\mathbf{K}\geq 1)\geq 0.9$ sera noté n_{min}.

Voici la méthode pour approximer n_{min} :

- on cherche le plus petit entier $j'\geq 1$ pour qu'en réalisant j' fois l'épreuve C, la probabilité d'avoir au moins 1 réussite soit ≥ 0.9 :

- on cherche le plus petit entier $i'\geq j'$ pour qu'en réalisant i' fois l'épreuve B, la probabilité d'avoir au moins j' réussites soit ≥ 0.9 :

- on cherche le plus petit entier $n'\geq i'$ pour qu'en réalisant n' fois l'épreuve A, la probabilité d'avoir au moins i' réussites soit ≥ 0.9 :

C'est cet entier n' que l'entreprise envisageait de prendre comme approximation de n_{min}.

Avant de juger de la qualité de cette approximation, précisons la méthode pratique pour obtenir cet entier n'.

Soit $X_{m,s}$ une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres m et s, et $F_{m,s}$ sa fonction de répartition : $F_{m,s}(k)=P(X_{m,s}\leq k)$ et $F_{m,s}(0)=(1-s)^m$, $F_{m,s}(m)=1$.
Puisque, pour k entier, $P(X_{m,p}\geq k)=1-F_{m,p}(k-1)$,

- j' est le plus petit entier ≥ 1 tel que $F_{j',r}(0)=(1-r)^{j'}\leq 0.1$
- i' est le plus petit entier $\geq j'$ tel que $F_{i',q}(j'-1)\leq 0.1$
- n' est le plus petit entier $\geq i'$ tel que $F_{n',p}(i'-1)\leq 0.1$

Comme pratiquement dans tout ouvrage sur les variables aléatoires réelles on trouve des tables de $F_{m,s}$, ces dernières peuvent être utilisées pour déterminer i' et n' : mais bien souvent ces tables ne sont pas par pas de 1 en m, et les valeurs de s proposées ne sont pas forcément celles auxquelles on s'intéresse (p, q, r), et donc il faut faire des interpollations : il vaut mieux aller sur calcul en ligne de la loi binomiale où il y a un module de calcul qui après avoir rentré n'importe quel m et et n'importe quel s donne "toute" la fonction de répartition $F_{m,s}$, cad il donne les valeurs de $F_{m,s}(k)$, pour k=0 à m : j'ai utilisé ce lien pour faire les exemples ci-dessous.

Sur deux exemples comparons cet entier n' avec n_{min}.

Exemple 1 : p=q=r=0.5

- j' est le plus petit entier ≥ 1 tel que $0.5^{j'}\leq 0.1$, soit j'=4
- i' est le plus petit entier ≥ 4 tel que $F_{i',0.5}(3)\leq 0.1$, ce qui donne i'=12 ; $F_{11,0.5}(3)=0.113...$, $F_{12,0.5}(3)=0.072...$
- n' est le plus petit entier ≥ 12 tel que $F_{n',0.5}(11)\leq 0.1$, ce qui donne **n'=30** ; $F_{29,0.5}(11)=0.132...$, $F_{30,0.5}(11)=0.1002...\approx 0.1$

alors que dans ce cas $\mathbf{n_{min}=18}$, d'où une erreur relative $|n'-n_{min}|/n_{min}\approx 66\%$.

Exemple 2 : p=0.8, q=0.4, r=0.8

- j' est le plus petit entier ≥ 1 tel que $0.2^{j'}\leq 0.1$, soit j'=2
- i' est le plus petit entier ≥ 2 tel que $F_{i',0.4}(1)\leq 0.1$, ce qui donne i'=9 ; $F_{8,0.4}(1)=0.106...$, $F_{9,0.4}(1)=0.07...$

- n' est le plus petit entier ≥9 tel que $F_{n',0.8}(8)\leq 0.1$, ce qui donne **n'=13** ; $F_{12,0.8}(8)=0.205...$, $F_{13,0.8}(8)=0.0991...$

alors que dans ce cas **n_{min}=8**, d'où une erreur relative $|n'-n_{min}|/n_{min}\approx 62\%$.

<u>Conclusion</u> **: cette approche pour approximer n_{min} est mauvaise car elle peut conduire à une erreur relative de plus de 60%.**

> **La raison est que cette méthode approchée s'impose des conditions qui ne sont pas nécessaires.**
> Par exemple lorsque p=0.8, q=0.4, r=0.8 cette méthode approchée cherche le plus petit entier n'≥9 tel qu'en réalisant n' fois l'épreuve A, la probabilité d'avoir au moins 9 réussites soit ≥0.9 : or l'étude de l'épreuve aléatoire ***E***, montre que pour n=8 on a P(**K**≥1)≥0.9, sans pour autant avoir P(**I**≥9)≥0.9, puisque P(**I**≥9)=0, la valeur maximum de **I** étant alors 8!

<- Sommaire Site