Calcul de l'intégrale $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^n+1)}{x^n+1}dx$ pour $n \geq 2$.

http://alain.pichereau.pages.perso-orange.fr
marc.pichereau@wanadoo.fr

1) Introduction

On va montrer le résultat suivant : pour $n \geq 2$,

$$I_n = \frac{2\pi}{n\sin(\frac{\pi}{n})}\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2(\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{n})) - \frac{\pi^2\cos(\frac{\pi}{n})}{2n\sin^2(\frac{\pi}{n})}$$

En particulier,

$$I_2 = \frac{2\pi}{2}\sum_{k=1}^{1}\sin^2(\frac{k\pi}{2})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{2})) - 0 = \pi\ln 2 \simeq 2.1775$$

Note : ce résultat peut être obtenu par le calcul des résidus en considérant $f(z) = \frac{\ln(z+i)}{z^2+1}$ et ... en prenant beaucoup de précautions dans la manipulation des logarithmes des nombres complexes ("dossier 15, pR35_2").

$$I_3 = \frac{2\pi}{3\sin(\frac{\pi}{3})}\sum_{k=1}^{2}\sin^2(\frac{k\pi}{3})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{3})) - \frac{\pi^2\cos(\frac{\pi}{3})}{6\sin^2(\frac{\pi}{3})} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\ln 3 - \frac{\pi^2}{9} \simeq 0.8960$$

$I_4 \simeq 0.5649$

Remarquons que les $\sin(\frac{k\pi}{n})$ ne sont pas tous distincts, puisque $\sin(\pi - x) = \sin x$:

si $n = 2p$, alors

$$\sin(\frac{\pi}{2p}) = \sin(\frac{(2p-1)\pi}{2p}), \ldots, \sin(\frac{k\pi}{2p}) = \sin(\frac{(2p-k)\pi}{2p}), \ldots, \sin(\frac{(p-1)\pi}{2p}) = \sin(\frac{(p+1)\pi}{2p}),$$

et $\sin(\frac{p\pi}{2p}) = 1$ est "seul", d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2(\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{n})) = 2[\sum_{k=1}^{p-1}\sin^2(\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{n}))] + \ln 2,$$ le $\sum_{k=1}^{p-1}$ étant nul si $n = 2$

si $n = 2p+1$, cette fois tous les $\sin(\frac{k\pi}{n})$ sont égaux deux à deux et

$$\sum_{k=1}^{n-1}\sin^2(\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{n})) = 2[\sum_{k=1}^{p}\sin^2(\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin(\frac{k\pi}{n}))]$$

Preuve

1) Justifions d'abord la convergence de l'intégrale en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{\ln(x^n+1)}{x^n+1} = \frac{\ln x}{x^n}g(x) \text{ avec } g(x) = \frac{n + \frac{\ln(1+\frac{1}{x^n})}{\ln x}}{1+\frac{1}{x^n}}$$

Puisque $\lim_{x\to+\infty} g(x) = n$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{n-1.2}} = 0$ (car $n - 1.2 > 0$),

pour x grand on a $0 < \frac{\ln x}{x^n} < \frac{\epsilon}{x^{1.2}}$ et donc $0 < f(x) < \frac{(n+1)\epsilon}{x^{1.2}}$ et $\int^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

$\boxed{2)}$ **Pour calculer I_n, l'idée va être de calculer explicitement pour $t \geq 0,$ l'intégrale** $G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^n x^n + 1)}{x^n + 1} dx,$ qui vérifie bien sûr $G(0) = 0$ et $G(1) = I_n$, cela en se ramenant à la recherche d'une primitive d'une fonction rationnelle.

Tout d'abord, pour tout $t > 0$ l'intégrale définissant $G(t)$ est encore convergente en $+\infty$ (même raisonnement que ci-dessus).

En utilisant un théorème de convergence dominée, montrons que G est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $t > 0$ $G'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{nt^{n-1}x^n}{(t^n x^n + 1)(x^n + 1)} dx.$

La fonction $g(x,t) = \frac{\ln(t^n x^n + 1)}{x^n + 1}$ vérifie

0) g est continue sur $R^+ \times R^{+*}$ (via opérations sur les fonctions continues)

1) sur $R^+ \times R^{+*},$ $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{nt^{n-1}x^n}{(t^n x^n + 1)(x^n + 1)}$

2) sur $R^+ \times R^{+*},$ $\frac{\partial g}{\partial t}$ est continue

pour $\alpha > 0$ et $T > \alpha$

3a) sur $R^+ \times]\alpha;T],$ $g(x,t) \leq \frac{\ln(T^n x^n + 1)}{x^n + 1} = \varphi_0(x),$ φ_0 étant continue, intégrable sur R^+ (cf $G(T)$ convergente en $+\infty$)

3b) sur $R^+ \times]\alpha;T],$ $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) < \frac{nT^{n-1}x^n}{(\alpha^n x^n + 1)(x^n + 1)} = \varphi_1(x),$ φ_1 étant continue, intégrable sur R^+ (car en $+\infty$ elle est équivalente à $\frac{K}{x^n}$ et $n \geq 2$)

Note : le fait que α soit strictement positif est indispensable pour ce 3b), pas pour le 3a) où $\alpha \geq 0$ aurait suffit.

Donc (convergence dominée), G est de classe C^1 sur $]\alpha;T]$ et $G'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx.$

Mais ceci est vrai pour tout $\alpha > 0$ et tout $T > 0,$ donc $\forall t \in]0;+\infty[$ on a $G'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) dx.$

Pour la dérivabilité en $0,$ ce qui précéde ne permet pas de conclure, mais on peut justifier la continuité de G en 0 (ce qui suffira pour la suite) :

le 0) et 3a) sont vrais sur $R^+ \times [0;T],$ donc (convergence dominée) G **est continue** sur $[0;T],$ **donc en 0**.

$\boxed{3)}$ **Décomposition en éléments simples dans** C de

$H(x) = \frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{nt^{n-1}x^n}{(t^n x^n + 1)(x^n + 1)},$ pour $t \neq 1.$

Dans toute la suite les racines nièmes de 1 seront notées $\xi_k = e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ pour $k = 0,1,\ldots,n-1.$

On notera r_n une racine nième de -1 : si n est impair on prendra -1, si n est pair on prendra $e^{\frac{\pi}{n}i}.$

H posséde $2n$ pôles simples : les $r_n\xi_k$ (les n racines de $x^n + 1$) et les $\frac{r_n\xi_k}{t}$ (les n racines de $t^n x^n + 1$) et ainsi

$H(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{x - r_n\xi_k} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_k}{x - \frac{r_n\xi_k}{t}}$, les A_k et B_k étant des constantes.

Note : si $t = 1,$ H a n pôles, tous doubles : les $r_n\xi_k.$ Voir annexe 4 pour la décomposition dans ce cas.

On sait que si $H(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est rationnelle de pôle simple $a,$ alors l'élément simple correspondant est $\dfrac{A}{x-a}$ avec $A = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}.$

Ici, $P(x) = nt^{n-1}x^n$ et $Q(x) = (t^n x^n + 1)(x^n + 1),$ soit
$Q'(x) = nt^n x^{n-1}(x^n + 1) + (t^n x^n + 1)(nx^{n-1}).$

D'où puisque $(r_n\xi_k)^n = -1,$ $P(r_n\xi_k) = -nt^{n-1}$ et $Q'(r_n\xi_k) = 0 + (-t^n + 1) \times \dfrac{-n}{r_n\xi_k},$

ce qui donne $A_k = \dfrac{t^{n-1}r_n\xi_k}{1-t^n}.$

Par contre pour les autres pôles on a $(\dfrac{r_n\xi_k}{t})^n = \dfrac{-1}{t^n},$ et cette fois
$P(\dfrac{r_n\xi_k}{t}) = nt^{n-1}\dfrac{-1}{t^n} = -\dfrac{n}{t}$ et $Q'(\dfrac{r_n\xi_k}{t}) = nt^n(\dfrac{-1}{t^n})(\dfrac{t}{r_n\xi_k})(-\dfrac{1}{t^n} + 1) + 0 = -\dfrac{nt}{r_n\xi_k} \times \dfrac{t^n - 1}{t^n},$

et $B_k = \dfrac{t^{n-1}r_n\xi_k}{t(t^n - 1)}.$

<u>Finalement</u> $H(x) = \dfrac{t^{n-1}}{1-t^n}(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{r_n\xi_k}{x - r_n\xi_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{r_n\xi_k}{tx - r_n\xi_k}),$ le deuxième $\sum$ s'obtenant à partir du premier en y remplacant x par tx.

Pour passer à l'intégration, il va falloir regrouper les pôles conjugués afin d'obtenir la décomposition en éléments simples dans R.

Exemples :

$n = 3$: les racines troisièmes de -1 sont $-1, -j, -j^2,$ $-j$ et $-j^2$ étant conjugués, et rappelons le $1 + j + j^2 = 0$.

$$H(x) = \frac{t^2}{1-t^3}(\frac{-1}{x+1} - \frac{j}{x+j} - \frac{j^2}{x+j^2} + \frac{1}{tx+1} + \frac{j}{tx+j} + \frac{j^2}{tx+j^2})$$

$$H(x) = \frac{t^2}{1-t^3}(\frac{-1}{x+1} + \frac{x-2}{x^2-x+1} + \frac{1}{tx+1} + \frac{-tx+2}{(tx)^2 - tx + 1})$$

$n = 4$: les racines quatrièmes de -1 sont $e^{i\frac{\pi}{4}}, -e^{i\frac{\pi}{4}}, ie^{i\frac{\pi}{4}}$ (conjuguée de la précédente), $-ie^{i\frac{\pi}{4}}$ (conjuguée de $e^{i\frac{\pi}{4}}$).

$$H(x) = \frac{t^3}{1-t^4}(\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{x - e^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{x + ie^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{x + e^{i\frac{\pi}{4}}} + \frac{ie^{i\frac{\pi}{4}}}{x - ie^{i\frac{\pi}{4}}} - (\textit{idem} \text{ avec } x \text{ changé en } tx))$$

$$H(x) = \frac{t^3}{1-t^4}(\frac{\sqrt{2}x - 2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{-\sqrt{2}x - 2}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} - (\textit{idem} \text{ avec } x \text{ changé en } tx)).$$

Passons maintenant au cas général : on est obligé d'envisager deux cas, car selon la parité de $n,$ r_n est réel ou imaginaire.

<u>Si n est impair</u>, cad $n = 2p + 1,$ alors $r_n = -1$ et donc il s'agit là de voir quelles sont les couples de racines nièmes de 1 qui sont conjuguées entre elles.

Ce sont ξ_1 et $\xi_{n-1},$ ξ_2 et $\xi_{n-2},$ ..., ξ_p et $\xi_{n-p} = \xi_{p+1},$ la racine $\xi_0 = 1$ étant "seule".

Comme $\xi_k + \xi_{n-k} = 2\cos\dfrac{2k\pi}{n}$ et $\xi_k\,\xi_{n-k} = 1,$ en posant $\theta_k = \dfrac{2k\pi}{n},$ on obtient

$$H(x) = \frac{t^{n-1}}{1-t^n}(S_1(x) - S_1(tx))$$

avec $S_1(x) = (\dfrac{-1}{x+1} + \sum_{k=1}^{p}(\dfrac{-\xi_k}{x - r_n\xi_k} + \dfrac{-\xi_{n-k}}{x - r_n\xi_{n-k}})) = -(\dfrac{1}{x+1} + \sum_{k=1}^{p} \dfrac{2x\cos\theta_k + 2}{x^2 + 2x\cos\theta_k + 1})$

Le lecteur pourra vérifier qu'en faisant $n = 3,$ soit $p = 1,$ on retrouve bien l'exemple ci-dessus.

Si n est pair, cad $n = 2p$, alors $r_n = e^{\frac{i\pi}{n}}$.

Cette fois $r_n\xi_k$ et $r_n\xi_{k'}$ seront conjugués ssi $\frac{\pi}{n} + \frac{2k\pi}{n} + \frac{\pi}{n} + \frac{2k'\pi}{n} = 2\pi$, cad si $k' = n - k - 1$.

Les couples de racines nièmes de 1 qui sont conjuguées sont alors

$r_n\xi_0$ et $r_n\xi_{n-1}$, $r_n\xi_1$ et $r_n\xi_{n-2}$, ..., $r_n\xi_{p-1}$ et $r_n\xi_{n-(p-1)-1} = r_n\xi_p = -r_n$.

$r_n\xi_k + r_n\xi_{n-k-1} = e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i} + e^{\frac{(2(n-k-1)+1)\pi}{n}}$

$r_n\xi_k + r_n\xi_{n-k-1} = e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i} + e^{\frac{-(2k+1)\pi}{n}i} \times e^{2\pi i} = 2\cos\theta'_k$

avec $\theta'_k = \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

Et évidemment $(r_n\xi_k)(r_n\xi_{n-k-1}) = 1$.

On obtient alors

$H(x) = \frac{t^{n-1}}{1-t^n}(S_1(x) - S_1(tx))$

avec $S_1(x) = \sum_{k=0}^{p-1}(\frac{r_n\xi_k}{x - r_n\xi_k} + \frac{r_n\xi_{n-k-1}}{x - r_n\xi_{n-k-1}}) = \sum_{k=0}^{p-1}\frac{2x\cos\theta'_k - 2}{x^2 - 2x\cos\theta'_k + 1}$

Le lecteur pourra vérifier qu'en faisant $n = 4$, soit $p = 2$, on retrouve bien, là aussi, l'exemple ci-dessus.

$\boxed{4)}$ **Montrons que** pour $t \neq 1$ et $t > 0$, $G'(t) = \int_0^{+\infty} H(x)dx$ est en fait égal à $\frac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n} \times \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$.

Pour cela on commence évidemment par déterminer une primitive $U(x)$ de $H(x) = \frac{nt^{n-1}x^n}{(t^nx^n+1)(x^n+1)}$ à partir de sa décomposition en éléments simples dans R obtenue au paragraphe précédent : $\frac{t^{n-1}}{1-t^n}(S_1(x) - S_1(tx))$.

Rappelons qu'une primitive de $\frac{u'}{u}$ (sur un intervalle où u est non nulle) est $\ln|u|$, que pour $a \neq 0$, une primitive de $\frac{1}{a^2+x^2}$ est $\arctan\frac{x}{a}$ et si $U_1(x)$ est une primitive de $S_1(x)$, alors, pour $t \neq 0$, $\frac{1}{t}U_1(tx)$ est une primitive de $S_1(tx)$.

$\boxed{4.1}$ Cas n est impair ($n = 2p+1$)

$\frac{2x\cos\theta + 2}{x^2 + 2x\cos\theta + 1} = \frac{\cos\theta(2x + 2\cos\theta)}{x^2 + 2x\cos\theta + 1} + \frac{2\sin^2\theta}{(x+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$, et puisque θ prendra les valeurs $\theta_k = \frac{2k\pi}{n}$ pour $k = 1, 2, \ldots, p$ il sera toujours dans $]0;\pi[$ et ainsi $\sin\theta > 0$.

Une primitive, sur R, de $\frac{2x\cos\theta + 2}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}$ est donc

$\cos\theta\ln(x^2 + 2x\cos\theta + 1) + 2\sin\theta\arctan(\frac{x+\cos\theta}{\sin\theta})$; d'où une primitive de $H(x)$ sur R^+ est

$U(x) = \frac{t^{n-1}}{1-t^n}[-\ln|x+1| - \sum_{k=1}^{p}(\cos\theta_k\ln(x^2 + 2x\cos\theta_k + 1) + 2\sin\theta_k\arctan(\frac{x+\cos\theta_k}{\sin\theta_k}))$

$+\frac{1}{t}(\ln(|tx+1| + \sum_{k=1}^{p}(\cos\theta_k\ln((tx)^2 + 2tx\cos\theta_k + 1) + 2\sin\theta_k\arctan(\frac{tx+\cos\theta_k}{\sin\theta_k}))]$.

On en déduit $U(0) = \frac{t^{n-1}}{1-t^n}[(\frac{1}{t} - 1)\sum_{k=1}^{p}2\sin\theta_k\arctan(\frac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k})]$.

Comme $\dfrac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k} = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta_k)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta_k)}$ et $\frac{\pi}{2} - \theta_k \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$,

$U(0) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}\sum_{k=1}^{p} 2(\frac{\pi}{2} - \theta_k)\sin\theta_k.$

Quant à $\lim_{x\to+\infty} U(x)$, que je noterai $U(\infty)$, il faut regrouper les logarithmes, les $\arctan$ ne posant pas de problèmes, puisque tous "donnent" $\frac{\pi}{2}$.

Pour cela je considère $s = \ln(x+1) + \sum_{k=1}^{p}(\cos\theta_k \ln(x^2 + 2x\cos\theta_k + 1)$; x tendant vers $+\infty$, je suppose ici $|x+1| = x+1$.

En mettant x en facteur dans $x+1$ et x^2 dans $x^2 + 2x\cos\theta_k + 1$, on obtient

$s = \ln((x+1)\prod_{k=1}^{p}(x^2 + 2x\cos\theta_k + 1)^{\cos\theta_k}) = \ln(x^{1+\sum_{k=1}^{p} 2\cos\theta_k} \times r(x))$, avec $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 1$.

Il est bien connu que $\xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} = 0$, soit $\xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} = -1$.

Et, cf le 3), ξ_k et ξ_{n-k} sont conjugués avec $\xi_k + \xi_{n-k} = 2\cos\theta_k$, cela pour $k = 1,2,\ldots,p$, donc $2\sum_{k=1}^{p}\cos\theta_k = -1$.

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} s = \lim_{x\to+\infty} \ln(r(x)) = 0$.

Même chose pour la limite en $+\infty$ de $\ln(tx+1) + \sum_{k=1}^{p}(\cos\theta_k \ln((tx)^2 + 2tx\cos\theta_k + 1)$, puisque $t > 0$.

D'où $U(\infty) = \dfrac{t^{n-1}}{1-t^n}(-\sum_{k=1}^{p} 2\sin\theta_k \frac{\pi}{2} + \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{p} 2\sin\theta_k \frac{\pi}{2}) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}\pi\sum_{k=1}^{p}\sin\theta_k$, ce qui donne pour $t > 0$, $G'(t) = U(\infty) - U(0) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}(\pi\sum_{k=1}^{p}\sin\theta_k - \sum_{k=1}^{p} 2(\frac{\pi}{2} - \theta_k)\sin\theta_k)$,

soit $G'(t) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}(2\sum_{k=1}^{p}\theta_k\sin\theta_k)$

Mais, cf le 1) de l'annexe 3, $2\sum_{k=1}^{p}\theta_k\sin\theta_k = 2 \times \dfrac{2\pi}{n} \times \dfrac{n}{4\sin\frac{\pi}{n}} = \dfrac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$,

et on arrive finalement à $G'(t) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n} \times \dfrac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$.

$\boxed{4.2}$ Cas n pair ($n = 2p$)

$\dfrac{2x\cos\theta - 2}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} = \dfrac{\cos\theta(2x - 2\cos\theta)}{x^2 - 2x\cos\theta + 1} - \dfrac{2\sin^2\theta}{(x-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}$, et puisque θ prendra les valeurs $\theta'_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$ pour $k = 0,2,\ldots,p-1$ il sera toujours dans $]0;\pi[$ et ainsi $\sin\theta > 0$.

Une primitive, sur R, de $\dfrac{2x\cos\theta + 2}{x^2 + 2x\cos\theta + 1}$ est donc

$\cos\theta\ln(x^2 - 2x\cos\theta + 1) - 2\sin\theta\arctan(\dfrac{x - \cos\theta}{\sin\theta})$; d'où une primitive de $H(x)$ sur R^+ est

$U(x) = \dfrac{t^{n-1}}{1-t^n}[\sum_{k=0}^{p-1}(\cos\theta'_k\ln(x^2 - 2x\cos\theta'_k + 1) - 2\sin\theta'_k\arctan(\dfrac{x - \cos\theta'_k}{\sin\theta'_k}))$

$-\frac{1}{t}(\sum_{k=0}^{p-1}(\cos\theta'_k\ln((tx)^2 - 2tx\cos\theta'_k + 1) - 2\sin\theta'_k\arctan(\dfrac{tx - \cos\theta'_k}{\sin\theta'_k}))]$.

La fonction $\arctan$ étant impaire,

$U(0) = \dfrac{t^{n-1}}{1-t^n}[(1-\frac{1}{t})\sum_{k=0}^{p-1} 2\sin\theta'_k \arctan(\dfrac{\cos\theta'_k}{\sin\theta'_k})]$.

Et pour la même raison que dans le cas n impair,

$U(0) = \dfrac{t^{n-2}(t-1)}{1-t^n}\sum_{k=0}^{p-1} 2(\frac{\pi}{2} - \theta'_k)\sin\theta'_k$.

Quant à $U(\infty)$, il faut encore regrouper les logarithmes, les $\arctan$ ne posant pas de problèmes, puisque tous "donnent" $\frac{\pi}{2}$ (rappel : $t > 0$).

$s = \sum_{k=0}^{p-1}(\cos\theta'_k \ln(x^2 - 2x\cos\theta'_k + 1) = \ln(x^{\sum_{k=0}^{p-1} 2\cos\theta'_k} \times r(x))$, avec $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 1$.

On a toujours $\xi_0 + \xi_1 + \ldots + \xi_{n-1} = 0$, mais cette fois ce sont $r_n\xi_k$ et $r_n\xi_{n-k-1}$ qui sont conjugés, pour $k = 0, 1, \ldots, p-1$, (voir le 3)), et puisque $r_n\xi_k = e^{i\theta'_k}$,

$r_n\xi_k + r_n\xi_{n-k-1} = 2\cos\theta'_k$ et donc $\sum_{k=0}^{p-1} 2\cos\theta'_k = 0$ ce qui donne

$\lim_{x\to+\infty} s = \lim_{x\to+\infty} \ln(r(x)) = 1$.

D'où $U(\infty) = \dfrac{t^{n-1}}{1-t^n}(\sum_{k=0}^{p-1} -2\sin\theta'_k \times \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{p-1} -2\sin\theta'_k \times \frac{\pi}{2}) = \pi\dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k$.

Ainsi pour $t > 0$, $G'(t) = U(\infty) - U(0) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}(2\pi\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k - \sum_{k=1}^{p} 2\theta'_k\sin\theta'_k)$.

Là, les sommes $\pi\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k$ se sont ajoutées au lieu de s'annuler : cependant ca va se simplifier!

En effet, puisque $\theta'_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$,

$2\pi\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k - \sum_{k=0}^{p} 2\theta'_k\sin\theta'_k = 2\pi(1-\frac{1}{n})\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k - \frac{4\pi}{n}\sum_{k=0}^{p-1} k\sin\theta'_k$

Et, cf le 3) de l'annexe 2, $\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k = \dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{n})}$ et cf le 3) de l'annexe 3,

$\sum_{k=0}^{p-1} k\sin\theta'_k = \dfrac{n-2}{4\sin(\frac{\pi}{n})}$, ce qui donne

$2\pi\sum_{k=0}^{p-1}\sin\theta'_k - \sum_{k=0}^{p} 2\theta'_k\sin\theta'_k = \dfrac{2\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}(1 - \frac{1}{n} - \frac{n-2}{2n}) = \dfrac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$

et, comme dans le cas n impair, pout tout $t > 0$ et $t \neq 1$, $G'(t) = \dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n} \times \dfrac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{n})}$.

5) Détermination de I_n.

Puisque $I_n = G(1)$, on va d'abord expliciter $G(t)$ sur $]0;1[$, cad déterminer une primitive, sur $]0;1[$ de $\dfrac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n} = \dfrac{t^{n-1}}{t^n-1} - \dfrac{t^{n-2}}{t^n-1}$.

Une primitive sur $]0;1[$ de $\dfrac{t^{n-1}}{t^n-1}$ étant $\frac{1}{n}\ln|t^n-1| = \frac{1}{n}\ln(1-t^n)$, il s'agit de trouver une primitive de $K(t) = \dfrac{t^{n-2}}{t^n-1}$.

Les pôles de K sont les racines nièmes $\xi_k = e^{i\theta_k} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ de 1, en appliquant la régle rappelée au 3),

$K(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{A_k}{t-\xi_k}$ avec $A_k = \dfrac{\xi_k^{n-2}}{n\xi_k^{n-1}} = \dfrac{1}{n\xi_k}$, et

$K(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{\xi_k}}{t-\xi_k}$: là encore il faut regrouper deux à deux les pôles conjugués, ce qui oblige de nouveau à envisager deux cas.

$\boxed{5.1)}$ Cas n impair ($n = 2p+1$)

Ce sont ξ_k et ξ_{n-k} qui sont conjuguées pour $k = 1,2,\ldots p,$ d'où

$K(t) = \frac{1}{n}(\frac{1}{t-1} + \sum_{k=1}^{p}(\frac{\frac{1}{\xi_k}}{t-\xi_k} + \frac{\frac{1}{\xi_{n-k}}}{t-\xi_{n-k}}).$

Puisque $\xi_k\xi_{n-k} = 1,$ $\frac{1}{\xi_k} + \frac{1}{\xi_{n-k}} = \xi_k + \xi_{n-k} = 2\cos\theta_k,$ et

$\frac{\xi_k}{\xi_{n-k}} + \frac{\xi_{n-k}}{\xi_k} = \xi_k^2 + \xi_{n-k}^2 = e^{i\frac{4k\pi}{n}} + e^{-i\frac{4k\pi}{n}} = 2\cos(2\theta_k).$

D'où $K(t) = \frac{1}{n}(\frac{1}{t-1} + \sum_{k=1}^{p}\frac{2t\cos\theta_k - 2\cos(2\theta_k)}{t^2-2t\cos\theta_k+1}).$

$\frac{2t\cos\theta - 2\cos(2\theta)}{t^2-2t\cos\theta+1} = \cos\theta\frac{2t-2\cos\theta}{t^2-2t\cos\theta+1} + \frac{2\sin^2\theta}{(t-\cos\theta)^2+\sin^2\theta},$ et donc cette expression a pour primitive

$\cos\theta\ln(t^2-2t\cos\theta+1) + 2\sin\theta\arctan\frac{t-\cos\theta}{\sin\theta},$ cela pour $\sin\theta \neq 0,$ ce qui sera le cas pour $\theta = \theta_k = \frac{2k\pi}{n}.$

Une primitive de $\frac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}$ sur $]0;1[$ est alors

$V(t) = \frac{1}{n}[\ln|t^n-1| - \ln|t-1| - \sum_{k=1}^{p}(\cos\theta_k\ln(t^2-2t\cos\theta_k+1) + 2\sin\theta_k\arctan\frac{t-\cos\theta_k}{\sin\theta_k})].$

Ainsi, il existe une constante C telle que pour tout $t \in]0;1[,$ $G(t) = \rho V(t) + C,$ avec $\rho = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}.$

Rappel : $\rho = 2\sum_{k=1}^{p}\theta_k\sin\theta_k,$ cf la fin du 4.1).

Comme on en a vu que G était continue en 0 (voir le 2)), on passe à la limite en 0, ce qui donne ($G(0) = 0$)

$C = -\frac{\rho}{n}(\sum_{k=1}^{p}2\sin\theta_k\arctan\frac{\cos\theta_k}{\sin\theta_k}) = -\frac{\rho}{n}(\sum_{k=1}^{p}2(\frac{\pi}{2}-\theta_k)\sin\theta_k = -\frac{\rho}{n}(\pi\sum_{k=1}^{p}\sin\theta_k - \rho).$

Et en passant à la limite en 1, cf $\lim_{t\to1}\ln|\frac{t^n-1}{t-1}| = \lim_{t\to1}\ln|t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+t+1| = \ln n,$ et cf G est continue en 1,

$G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n - \sum_{k=1}^{p}(\cos\theta_k\ln(2(1-\cos\theta_k)) + 2\sin\theta_k\arctan\frac{1-\cos\theta_k}{\sin\theta_k})] + C.$

Mais $1-\cos\theta_k = 2\sin^2\frac{\theta_k}{2}$ et $\arctan\frac{1-\cos\theta_k}{\sin\theta_k} = \arctan\tan\frac{\theta_k}{2} = \frac{\theta_k}{2},$ puisque $\frac{\theta_k}{2} = \frac{k\pi}{2p+1}$ est dans $]0;\frac{\pi}{2}[,$ d'où

$G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n - \sum_{k=1}^{p}\cos\theta_k\ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}) - \frac{\rho}{2}] - \frac{\rho}{n}(\pi\sum_{k=1}^{p}\sin\theta_k - \rho).$

$G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n - \sum_{k=1}^{p}\cos\theta_k\ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}) + \frac{\rho}{2} - \pi\sum_{k=1}^{p}\sin\theta_k],$ expression qui va pouvoir se simplifier un peu...

$\sum_{k=1}^{p}\cos\theta_k\ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}) = \sum_{k=1}^{p}(1-2\sin^2\frac{\theta_k}{2})2\ln(2\sin\frac{\theta_k}{2})$

$= \ln(4^p \prod_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{\theta_k}{2}) - 4\sum_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{\theta_k}{2} \ln(2\sin\frac{\theta_k}{2}).$

On remarque que $\prod_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{\theta_k}{2} = \prod_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{2p} \sin\frac{k\pi}{n}$, car cf $\sin(\pi - x) = \sin x$,

$\sin(\frac{k\pi}{n}) = \sin(\frac{(2p+1-k)\pi}{n})$, pour $k = 1, 2, \ldots, p$.

En utilisant alors l'annexe 1, $\prod_{k=1}^{2p} \sin\frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, ce qui donne

$\ln(4^p \prod_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{\theta_k}{2}) = \ln(4^p \frac{n}{2^{n-1}}) = \ln n.$

D'où $G(1) = \frac{\rho}{n}[4\sum_{k=1}^{p} \sin^2 \frac{\theta_k}{2} \ln(2\sin\frac{\theta_k}{2}) + \frac{\rho}{2} - \pi\sum_{k=1}^{p} \sin\theta_k].$

Enfin, cf $\rho = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$ et cf le 1) de l'annexe 2, $\sum_{k=1}^{p} \sin\theta_k = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$,

on a $\frac{\rho}{2} - \pi\sum_{k=1}^{p} \sin\theta_k = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\pi\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}} = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{n}} - \frac{\pi\cos^2\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$,

soit $\frac{\rho}{2} - \pi\sum_{k=1}^{p} \sin\theta_k = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{n}}(1 - 2\cos^2\frac{\pi}{2n}) = -\frac{\pi\cos\frac{\pi}{n}}{2\sin\frac{\pi}{n}}$,

et finalement $I_n = G(1) = \frac{4\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}} \sum_{k=1}^{p} \sin^2\frac{k\pi}{n} \ln(2\sin\frac{k\pi}{n}) - \frac{\pi^2\cos\frac{\pi}{n}}{2n\sin^2\frac{\pi}{n}}$, **qui est bien le résultat annoncé dans le cas** $n = 2p+1$.

5.2) Cas n pair ($n = 2p$)

Cette fois ξ_k et ξ_{n-k} sont conjuguées uniquement pour $k = 1, 2, \ldots p-1$, $\xi_0 = 1$ et $\xi_p = -1$ étant les deux racines réelles, d'où

$K(t) = \frac{1}{n}(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t-1} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{2t\cos\theta_k - 2\cos(2\theta_k)}{t^2 - 2t\cos\theta_k + 1})$, le $\sum$ étant nul si $n = 2$.

Une primitive de $\frac{t^{n-2}(1-t)}{1-t^n}$ sur $]0;1[$ est alors

$V(t) = \frac{1}{n}[\ln|t^n - 1| - \ln|t-1| + \ln|t+1| - \sum_{k=1}^{p-1}(\cos\theta_k \ln(t^2 - 2t\cos\theta_k + 1) + 2\sin\theta_k \arctan\frac{t - \cos\theta_k}{\sin\theta_k})].$

Ainsi, il existe une constante C telle que pour tout $t \in]0;1[$, $G(t) = \rho V(t) + C$, avec $\rho = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Note : cette fois on n'a pas $\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}} = 2\sum_{k=1}^{p} \theta_k \sin\theta_k$, puisque cette relation n'est vraie que pour n impair!

Comme on en a vu que G était continue en 0 (voir le 2)), on passe à la limite en 0, ce qui donne ($G(0) = 0$)

$0 = \frac{\rho}{n}(\sum_{k=1}^{p-1} 2\sin\theta_k \arctan\frac{t - \cos\theta_k}{\sin\theta_k}) + C$

$C = -\frac{\rho}{n}(\sum_{k=1}^{p-1} 2(\frac{\pi}{2} - \theta_k)\sin\theta_k) = -\frac{\rho}{n}(\pi\sum_{k=1}^{p-1} \sin\theta_k - \sum_{k=1}^{p-1} 2\theta_k \sin\theta_k)$

Puis on passe à la limite en 1 (G est continue en 1) :

$G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n + \ln 2 - \sum_{k=1}^{p-1}(\cos\theta_k \ln(2(1 - \cos\theta_k)) + 2\sin\theta_k \arctan\frac{1 - \cos\theta_k}{\sin\theta_k})] + C$

$G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n + \ln 2 - \sum_{k=1}^{p-1}(\cos\theta_k \ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}) - \sum_{k=1}^{p-1}\theta_k \sin\theta_k] + C$ (voir le cas n impair pour les arctan)

$G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n + \ln 2 - \sum_{k=1}^{p-1}(\cos\theta_k \ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}) + \sum_{k=1}^{p-1}\theta_k \sin\theta_k - \pi\sum_{k=1}^{p-1}\sin\theta_k],$ les trois $\sum$ se réduisant à 0 si $n = 2$ (dans ce cas $p-1 = 0$)

Simplifions $s = \sum_{k=1}^{p-1}\theta_k \sin\theta_k - \pi\sum_{k=1}^{p-1}\sin\theta_k = \frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{p-1}k\sin\frac{2k\pi}{n} - \pi\sum_{k=1}^{p-1}\sin\frac{2k\pi}{n}.$

Cf ci-dessus, s est nul pour $n = 2,$ et cf le 2) de l'annexe 3 et le 2) de l'annexe 2), pour $n \geq 4,$

$s = \frac{2\pi}{n} \times \frac{n}{4}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} - \pi\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}} = -\frac{\pi}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$, résultat qui donne 0 si $n = 2,$ donc cette expression donne la valeur de s pour $n \geq 2.$

Simplifions le dernier $\sum$, cad $s' = \sum_{k=1}^{p-1}(\cos\theta_k \ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}).$

Cf ci-dessus, il est aussi nul pour $n = 2.$

Et pour $n \geq 4$

$s' = \sum_{k=1}^{p-1}(1 - 2\sin^2\frac{\theta_k}{2})\ln(4\sin^2\frac{\theta_k}{2}) = \ln(4^{p-1}\prod_{k=1}^{p-1}\sin^2\frac{k\pi}{n}) - 4\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n}).$

Mais cf l'annexe 1), $\prod_{k=1}^{p-1}\sin^2\frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{2p-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, d'où finalement, puisque $4^{p-1} = 2^{n-2}$,

$s' = \ln(2^{n-2} \times \frac{n}{2^{n-1}}) - 4\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n}) = -\ln 2 + \ln n - 4\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n}).$

En convenant que pour $n = 2$ on a $\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n}),$ alors cette expression est nulle pour $n = 2$, cad elle donne la valeur de s' lorsque $n \geq 2.$

Finalement, avec la convention $\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n}) = 0$ pour $n = 2,$

pour $n \geq 2$ on a $G(1) = \frac{\rho}{n}[\ln n + \ln 2 + \ln 2 - \ln n + 4\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n}) - \frac{\pi}{2}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}],$ soit

$I_n = G(1) = \frac{2\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}[\ln 2 + 2\sum_{k=1}^{p-1}(\sin^2\frac{k\pi}{n})\ln(2\sin\frac{k\pi}{n})] - \frac{\pi^2}{2n}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin^2\frac{\pi}{n}}.$

Ceci est bien le résultat annoncé dans le cas $n = 2p$.

Annexe 1

Pour tout entier $n \geq 2, \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ (ex : $n = 3$ donne $\sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3}{2^2}$)

Si n est impair $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin^2 \frac{k\pi}{n}$, si n est pair $\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} = \prod_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin^2 \frac{k\pi}{n}$

Une conséquence : pour tout entier $p \geq 1$, $\prod_{k=0}^{p-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{4p} = \frac{\sqrt{2}}{2^p}$

(ex : $p = 3$ donne $\sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{3\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{8}$)

Preuve

Les n racines, dans C, de $(z+1)^n - 1$ sont $z_k = e^{\frac{2k\pi}{n} i} - 1$, pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
Evidemment $z_0 = 0$, et les autres racines sont les $n-1$ racines de $\frac{(z+1)^n - 1}{z}$, polynôme dont le terme constant est $C_n^{n-1} = n$.
Donc $\prod_{k=1}^{n-1} z_k = (-1)^{n-1} n$.
Mais $z_k = e^{\frac{k\pi}{n} i}(e^{\frac{k\pi}{n} i} - e^{-\frac{k\pi}{n} i}) = 2i(\sin \frac{k\pi}{n}) e^{\frac{k\pi}{n} i}$,
d'où en notant $A_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n}$,

$(-1)^{n-1} n = (2i)^{n-1} A_n e^{(1+2+\ldots+n-1)\frac{\pi}{n} i} = (2i)^{n-1} A_n e^{(n-1)\frac{\pi}{2} i} = (2i)^{n-1} A_n i^{n-1}$,
soit $(-1)^{n-1} n = 2^{n-1}(-1)^{n-1} A_n$, ce qui donne le résultat annoncé.

Les autres écritures de A_n selon la parité de n, vient du fait que $\sin(\pi - x) = \sin x$,
Donc si $n = 2p+1$ ($p = \frac{n-1}{2}$), $\sin \frac{k\pi}{n} = \sin \frac{(n-k)\pi}{n}$, pour $k = 1, 2, \ldots p$
et si $n = 2p$ ($p = \frac{n}{2}$), $\sin \frac{k\pi}{n} = \sin \frac{(n-k)\pi}{n}$, pour $k = 1, 2, \ldots, p-1$, et il y a un sinus "isolé" : $\sin \frac{p\pi}{n} = 1$.

Preuve de la conséquence : en remplacant n par $2n$ dans le résultat précédent on obtient que pour tout $n \geq 1, \prod_{k=1}^{2n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}}$.
Mais comme $2n$ est pair, $\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{2n}{2^{2n-1}}$.
On remplace maintenant n par $2p$,
et on pose $K = \prod_{k=0}^{p-1} \sin \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ (c'est ce que l'on cherche) et $K' = \prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{2k\pi}{2n}$.
On a évidemment $K^2 K'^2 = \frac{2n}{2^{2n-1}}$, mais $K' = \prod_{k=1}^{p-1} \sin \frac{k\pi}{n}$, donc $K'^2 = \frac{n}{2^{n-1}}$, puisque $n = 2p$ est pair.
D'où $K^2 \frac{n}{2^{n-1}} = \frac{2n}{2^{2n-1}}$, soit $K^2 = \frac{2}{2^n}$, ce qu'il fallait démontrer.

Annexe 2

1) Si n est impair, $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{2\sin\frac{\pi}{2n}}$ (ex : $n = 3$ donne $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{2\sin\frac{\pi}{6}}$)

2) Si n est pair, $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}$ (ex : $n = 6$ donne $\sin\frac{2\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{6} = \frac{\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}$)

3) Si n est pair, $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$

(ex $n = 6$ donne $\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{3\pi}{6} + \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}$)

Preuve

1) Pour $n = 2p+1$, $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \sin\frac{2k\pi}{n}$ est la partie imaginaire de $S = \sum_{k=1}^{p} e^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

$S = \sum_{k=1}^{p} x^k$ avec $x = e^{2ui}$ où $u = \frac{\pi}{n}$.

$S = x\frac{1-x^p}{1-x} = e^{2ui}\frac{1+e^{-ui}}{1-e^{2ui}}$, puisque $x^p = e^{2upi} = e^{u(n-1)i} = e^{-ui}e^{\pi i} = -e^{-ui}$

$S = e^{ui}\frac{1+e^{ui}}{1-(e^{ui})^2} = \frac{e^{ui}}{1-e^{ui}} = \frac{e^{ui}}{1-\cos u - i\sin u}$

$S = \frac{e^{ui}}{2\sin\frac{u}{2}} \times \frac{1}{\sin\frac{u}{2} - i\cos\frac{u}{2}} = \frac{ie^{ui}}{2e^{\frac{ui}{2}}\sin\frac{u}{2}} = \frac{ie^{\frac{ui}{2}}}{2\sin\frac{u}{2}}$, et la partie imaginaire de S est bien $\frac{\cos\frac{u}{2}}{2\sin\frac{u}{2}}$.

2) Pour $n = 2p$, $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \sin\frac{2k\pi}{n}$ est la partie imaginaire de $S = \sum_{k=1}^{p-1} e^{\frac{k\pi}{p}i}$.

En posant $x = e^{\frac{\pi}{p}i}$, $S = \sum_{k=1}^{p-1} x^k = x\frac{1-x^{p-1}}{1-x} = \frac{1+x}{1-x}$ car $x^{p-1} = x^p x^{-1} = -x^{-1}$

$S = \frac{1+e^{\frac{\pi}{p}i}}{1-e^{\frac{\pi}{p}i}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{2p}i}+e^{\frac{\pi}{2p}i}}{e^{-\frac{\pi}{2p}i}-e^{\frac{\pi}{2p}i}} = \frac{2\cos\frac{\pi}{2p}}{-2i\sin\frac{\pi}{2p}} = \frac{\cos\frac{\pi}{2p}}{\sin\frac{\pi}{2p}}i$ et la partie imaginaire de S est bien $\frac{\cos\frac{\pi}{2p}}{\sin\frac{\pi}{2p}}$.

3) Pour $n = 2p$, $\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ est la partie imaginaire de $S = \sum_{k=0}^{p-1} e^{\frac{(2k+1)\pi}{n}i}$

Avec encore $x = e^{\frac{\pi}{p}i}$, $S = e^{\frac{\pi}{n}i}\sum_{k=0}^{p-1} x^k = x = e^{\frac{\pi}{n}i}\frac{1-x^p}{1-x} = e^{\frac{\pi}{n}i}\frac{2}{1-e^{\frac{2\pi}{n}i}}$ car $x^p = -1$.

$S = \dfrac{2e^{\frac{\pi}{n}i}}{2\sin^2\frac{\pi}{n} - 2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}} = \dfrac{ie^{\frac{\pi}{n}i}}{\sin\frac{\pi}{n}e^{\frac{\pi}{n}i}} = \dfrac{i}{\sin\frac{\pi}{n}}$, et la partie imaginaire de S est bien $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Annexe 3

1) Pour n impair, ≥ 3, $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k\sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{4\sin\frac{\pi}{n}}$ (ex : $n = 3$ donne $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{3}{4\sin\frac{\pi}{3}}$)

2) Pour n pair, ≥ 4, $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k\sin\frac{2k\pi}{n} = \frac{n\cos\frac{\pi}{n}}{4\sin\frac{\pi}{n}}$ (ex : $n = 4$ donne $\sin\frac{2\pi}{4} = \frac{4\cos\frac{\pi}{4}}{4\sin\frac{\pi}{4}}$)

3) Pour n pair, ≥ 4, $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k\sin\frac{(2k+1)\pi}{n} = \frac{n-2}{4\sin\frac{\pi}{n}}$

(ex : $n = 6$ donne $\sin\frac{3\pi}{6} + 2\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{4}{4\sin\frac{\pi}{6}}$)

Preuve

1) Pour $n = 2p+1 \geq 3$, $\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} k\sin\frac{2k\pi}{n}$ est la partie imaginaire de $S = \sum_{k=1}^{p} ke^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

$S = \sum_{k=1}^{p} kx^k = x\sum_{k=1}^{p} kx^{k-1}$ avec $x = e^{2ui}$ où $u = \frac{\pi}{n}$.

Mais pour tout $y \neq 1$, $\sum_{k=1}^{p} y^k = \frac{1-y^{p+1}}{1-y}$ a pour dérivée $\sum_{k=1}^{p} ky^{k-1} = \frac{1-(p+1)y^p+py^{p+1}}{(1-y)^2}$,

d'où $S = e^{2ui}\frac{1-(p+1)e^{2upi}+pe^{2u(p+1)i}}{(1-e^{2ui})^2}$.

Mais $e^{2upi} = e^{(n-1)ui} = -e^{-ui}$ et $e^{2u(p+1)i} = -e^{-ui}e^{2ui} = -e^{ui}$, et

$S = e^{2ui}\frac{1+(p+1)e^{-ui}-pe^{ui}}{(1-e^{2ui})^2} = e^{2ui}\frac{1+e^{-ui}+p(e^{-ui}-e^{ui})}{e^{2ui}(e^{-ui}-e^{ui})^2}$

$S = \frac{1+\cos u - i\sin u + p(-2i\sin u)}{(-2i\sin u)^2}$, de partie imaginaire $\frac{-(1+2p)\sin u}{-4\sin^2 u} = \frac{n}{4\sin u}$, ce qu'il fallait démontrer.

2) Pour $n = 2p \geq 4$, $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k\sin\frac{2k\pi}{n}$ est la partie imaginaire de $S = \sum_{k=1}^{p-1} ke^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

Avec $x = e^{\frac{\pi}{p}i}$, $S = \sum_{k=1}^{p-1} kx^k = x\sum_{k=1}^{p-1} kx^{k-1} = x\frac{1-px^{p-1}+(p-1)x^p}{(1-x)^2}$, cf le 1).

Or $x^p = -1$ et $x^{p-1} = \frac{-1}{x} = -e^{-\frac{\pi}{p}i}$, ce qui donne

$S = \frac{e^{\frac{\pi}{p}i}(1+pe^{-\frac{\pi}{p}i}-p+1)}{(1-e^{\frac{\pi}{p}i})^2} = \frac{e^{\frac{\pi}{p}i}(2-p+pe^{-\frac{\pi}{p}i})}{e^{\frac{\pi}{p}i}(e^{-\frac{\pi}{2p}i}-e^{+\frac{\pi}{2p}i})^2}$

$S = \frac{2-p+pe^{-\frac{\pi}{p}i}}{-4\sin^2\frac{\pi}{2p}}$, de partie imaginaire $\frac{-p\sin\frac{\pi}{p}}{-4\sin^2\frac{\pi}{2p}} = \frac{2p\cos\frac{\pi}{2p}}{4\sin\frac{\pi}{2p}}$, ce qu'il fallait démontrer.

3) Pour $n = 2p \geq 4$, $\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ est la partie imaginaire de $e^{\frac{\pi}{n}i}S$ avec $S = \sum_{k=1}^{p-1} ke^{\frac{2k\pi}{n}i}$.

Cette expression S est exactement celle rencontrée au 2), et donc la partie imaginaire de $e^{\frac{\pi}{n}i}S = e^{\frac{\pi}{2p}i}S$ est la partie imaginaire de

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2p}i}(2-p+pe^{-\frac{\pi}{p}i})}{-4\sin^2\frac{\pi}{2p}} = \frac{e^{\frac{\pi}{2p}i}(2-p)+pe^{-\frac{\pi}{2p}i}}{-4\sin^2\frac{\pi}{2p}},$$

cad $$\frac{(2-p)\sin\frac{\pi}{2p} - p\sin\frac{\pi}{2p}}{-4\sin^2\frac{\pi}{2p}} = \frac{2-2p}{-4\sin\frac{\pi}{2p}} = \frac{n-2}{4\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Annexe 4

Décomposition en éléments simples dans C de $H(x) = \dfrac{nx^n}{(x^n+1)^2}$ (il s'agit du cas $t = 1$)

Les n pôles de H sont les $r_n\xi_k$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Donc $H(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{A_k}{(x - r_n\xi_k)^2} + \dfrac{B_k}{x - r_n\xi_k}$, les A_k et B_k étant des constantes complexes.

Je vais utiliser le résultat suivant :

N et D étant des polynômes, a étant racine double de D et $D(x) = (x-a)^2Q(x)$, on a

$\dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{A}{(x-a)^2} + \dfrac{B}{x-a} + \dfrac{E(x)}{Q(x)}$, avec

$A = \dfrac{2N(a)}{D''(a)}$ et $B = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3N'(a)D''(a) - N(a)D'''(a)}{(D''(a))^2}$.

On l'applique avec $N(x) = nx^n$, $D(x) = (x^n+1)^2$, $a = r_n\xi_k$.

$N'(x) = n^2x^{n-1}$

$D'(x) = 2n(x^{2n-1} + x^{n-1})$

$D''(x) = 2n((2n-1)x^{2n-2} + (n-1)x^{n-2})$

$D'''(x) = 2n((2n-1)(2n-2)x^{2n-3} + (n-1)(n-2)x^{n-3})$

L'égalité $a^n = -1$, permet alors d'obtenir

$N(a) = -n$ et $N'(a) = \dfrac{-n^2}{a}$

$D''(a) = 2n(\dfrac{2n-1}{a^2} - \dfrac{n-1}{a^2}) = \dfrac{2n^2}{a^2}$

$D'''(a) = 2n(\dfrac{2(n-1)(2n-1)}{a^3} - \dfrac{(n-1)(n-2)}{a^3}) = \dfrac{6n^2(n-1)}{a^3}$.

D'où

$$A_k = \frac{-2n}{\frac{2n^2}{a^2}} = \frac{-a^2}{n}$$

$$B_k = \frac{2}{3} \times \frac{3 \times \frac{-n^2}{a} \times \frac{2n^2}{a^2} + n\frac{6n^2(n-1)}{a^3}}{(\frac{2n^2}{a^2})^2} = 2 \times \frac{\frac{-2n^4}{a^3} + \frac{2n^3(n-1)}{a^3}}{\frac{4n^4}{a^4}}$$

$$B_k = 2a\frac{-2n + 2(n-1)}{4n} = \frac{-a}{n}.$$

Ainsi $H(x) = \dfrac{-1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{(r_n\xi_k)^2}{(x - r_n\xi_k)^2} + \dfrac{r_n\xi_k}{x - r_n\xi_k}$.

<u>Remarque</u> :

on peut retrouver ce résultat à partir de celui trouvé au 3), cad à partir de

$H(x) = \dfrac{t^{n-1}}{1-t^n}(\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{r_n\xi_k}{x - r_n\xi_k} - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{r_n\xi_k}{tx - r_n\xi_k})$, valable pour $t \neq 1$.

En effet, on peut alors écrire,

$$(1-t)(1 + t + \ldots + t^{n-1})H(x) = t^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_n\xi_k x(t-1)}{(x - r_n\xi_k)(tx - r_n\xi_k)}.$$

Après simplification par $1-t$, et en faisant tendre t vers 1 et on obtient

$$nH(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{r_n\xi_k x}{(x - r_n\xi_k)^2}.$$

Ce qui redonne le résultat ci-dessus puisque $\dfrac{r_n\xi_k x}{(x - r_n\xi_k)^2} = \dfrac{(r_n\xi_k)^2}{(x - r_n\xi_k)^2} + \dfrac{r_n\xi_k}{x - r_n\xi_k}$.