Nombres décadiques ou brenoms

Introduction

Un nombre réel, écrit de façon habituelle en base 10, comporte un nombre fini de chiffres à gauche de la virgule et peut en avoir une infinité à droite de la virgule.

Pourquoi ne pas considérer les "symétriques" des nombres réels, c'est-à-dire des "nombres" ayant eux, un nombre fini de chiffres à droite de la virgule et une infinité à gauche de la virgule?

On va voir qu'en fait cela est possible : ces nombres sont appelés **brenoms** (le mot brenom s'obtient par l'échange des deux syllabes de nombre!).

Il y a un lien étroit entre ces nombres et les nombres p-adiques (p nombre 1er) : j'ai cependant choisi de faire une présentation qui ne nécessite pas, dans un 1er temps (cad jusqu'au chapitre 7 compris), la connaissances de ces nombres p-adiques afin qu'elle soit le plus accessible possible, du moins j'espère.....
Cependant, beaucoup d'aspects nécessiteront la connaissance des congruences (égalités modulo n) : voir pour une première approche le début de ma page sur la cryptographie affine.

Pour une présentation très théorique, voir l'étude de Vincent Lefevre (faire une recherche avec les mots clés : brenom Vincent Lefevre), et pour une présentation très rapide voir un chapitre du livre de Jean-Paul Delahaye : Les inattendus mathématiques (Belin).

Bien entendu, l'étude qui va suivre n'est pas, loin s'en faut, un recopiage de ces deux références.

retour plan de cette page

1-Premières définitions.

D1.1->**Un nombre décadique (ou brenom)** x est une suite de chiffres appartenant à {0;1;2;3;4;5;6;7;8;9}, cette suite (x_n) étant définie pour n≥-r, r étant un entier positif ou nul :

si r est non nul, x_{-r} est non nul
et on écrit $x=.....x_2x_1x_0,x_{-1}x_{-2}...x_{-r}$: c'est son développement (ou écriture) décadique.
Exemples :
x=.....125,2007 ; ses cinq derniers chiffres sont 5,2,0,0,7 et, quatre sont après la virgule ; en principe on n'écrira pas x=.....125,20070.

si r=0, x est appelé entier décadique (decadic integer dans la langue de Shakespeare) ou brenom entier et son développement (ou écriture) décadique est $x=.....x_2x_1x_0$; il n'y a pas dans ce cas de virgule et bien sûr ... pas de chiffres après la virgule.
Exemples :
x=.....125 ; ses deux derniers chiffres sont 2 et 5 ; x=.....1250 : ses deux derniers chiffres sont 5 et 0.

Pour tout n≥-r, on dira que x_n est le chiffre de rang n de x

Remarque : certains auteurs réservent l'appelation brenom aux entiers décadiques, les nombres décadiques avec chiffres après la virgule étant appelés brenoms fractionnaires.

L'ensemble des nombres décadiques (ou brenoms) sera noté NB(10) et celui des entiers décadiques (ou brenoms entiers) sera noté EN(10)

Si $y=.....y_2y_1y_0,y_{-1}y_{-2}...y_{-r'}$, alors x=y ssi r=r' et pour tout n≥-r on a $x_n=y_n$.

Si la suite (x_n) est périodique à partir d'un certain rang (vers la gauche), on dira que x est un **nombre décadique périodique et on notera entre parenthèse l'apparition d'une dernière période** :
.....(12)758,123 est le nombre décadique constitué que de blocs 12 à gauche de 758
on pourrait écrire aussi .....(21)2758,123 et même .....(1212)758,123.
.....(9) est l'entier décadique dont tous les chiffres sont 9.

Si à partir d'un certain (sur la gauche) tous les x_i sont nuls, on n'écrit pas ces zéros : par exemple x=125,2006
Cela signifie que les nombres décimaux "habituels" positifs sont considérés comme des nombres décadiques et que les entiers naturels "habituels" sont considérés comme des entiers décadiques :

$D^+ \subset NB(10)$ et $N \subset EN(10)$; on verra plus loin qu'en fait $D \subset NB(10)$ et $Z \subset EN(10)$

En particulier l'entier décadique dont tous les chiffres sont 0, est noté 0.

On appelle **complémentaire** du nombre décadique x, le nombre décadique c(x) obtenu en complémentant à 9 tous les chiffres de x.
Exemple : si x=.....(12)758,123 alors c(x)=.....(87)241,876.

Bien entendu $125{,}2006=1\times10^2+2\times10^1+5\times10^0+2\times10^{-1}+6\times10^{-4}$
Mais si on considère, par exemple l'entier décadique dont tous les chiffres sont 9 : x=.....(9), il n'est pas question d'écrire (du moins pour l'instant...) que $x=.....9\times10^3+9\times10^2+9\times10^1+9$, cette somme étant en fait, avec la distance habituelle sur R, infinie! (la série 9×10^n, étant alors divergente).
Mais on verra au chapitre 7, qu'avec une "bonne" distance sur NB(10) on a cette égalité!

$x=.....x_2x_1x_0,x_{-1}x_{-2}...x_{-r}$ étant un nombre décadique quelconque, on notera, pour tout $n\geq -r$
$[x]_n$=le nombre décimal obtenu en ne gardant de x que ses chiffres de rang≤n=le nombre décimal constitué des n+1+r derniers chiffres de x ; lorsque n≤-1 (ce qui exige r non nul) $[x]_n$ s'écrira 0,... et si n≤-2 les chiffres immédiatement après la virgule et de rang >n seront remplacés par 0.

Bien entendu si x est en fait un nombre décimal, écrit dans l'écriture décimale habituelle, on considére que devant son 1er chiffre (de rang p≥0) devant la virgule, il n'y a que les chiffres 0, et ainsi pour n≥p on a $[x]_n=x$.

Enfin, on convient pour n<-r, de poser $[x]_n=0$.
En résumé on a :

pour n≥0 $[x]_n=x_n...x_0,x_{-1}...x_{-r}$
et si -1≥n≥-r $[x]_n=0,0...0x_n...x_{-r}$ (si n=-1, il n'y a pas de 0 entre 0, et x_n)
et si -r>n, $[x]_n=0$

<u>Exemples</u> :
$[354{,}56]_5=000354{,}56=354{,}56$; $[.....81256{,}26]_2=256{,}26$; $[.....36{,}156]_{-1}=0{,}156$; $[.....36{,}2513]_{-2}=0{,}0513$; $[.....114{,}0013]_{-4}=0{,}0003$; $[.....114{,}0013]_{-5}=0$

si r=0 (x est alors entier décadique), pour n≥0, $[x]_n=x_n...x_0$=l'entier naturel constitué des n+1 derniers chiffres de x (attention, les premiers chiffres de ces n+1 derniers chiffres peuvent être nuls).

<u>Exemples</u> :
$[....81256]_3=1256$; $[...12056]_2=056=56$

Pour tout $n \geq -r$ on a $0 \leq [x]_n < 10^{n+1}$ et
si x est entier décadique, pour tout $n \geq 0$ on a $[x]_n \in \{0;1;...;10^{n+1}-1\}$

(en effet, la valeur maximale de $[x]_n$ est obtenue lorsque tous ses chiffres x_i sont égaux à 9, ce qui donne le 1er encadrement (calcul classique dans D), et le 2ième en résulte, puisque $[x]_n$ est alors un entier naturel ; on peut aussi dire dans ce cas que la valeur maximale de $[x]_n$ est 9...9 (il y a n+1 chiffres 9), soit $10^{n+1}-1$).

P1.1->

Soient x et y deux nombres décadiques :

x=y signifie que le rang de leur dernier chiffre est le même : -r (pour deux entiers décadiques cette condition est toujours vérifiée, car pour x et y, le rang de leur dernier chiffre est 0), **et pour tout $n \geq -r$ on a $[x]_n=[y]_n$**
x=y $\Leftrightarrow$ pour tout $n \geq 0$ on a $[x]_n=[y]_n$
x=y $\Leftrightarrow$ à partir d'un certain rang on a toujours $[x]_n=[y]_n$
(ces deux équivalences sont immédiates)

Si x et y sont maintenant des entiers décadiques, on a aussi

x=y $\Leftrightarrow$ à partir d'un certain rang on a toujours $[x]_n \equiv [y]_n$ (10^{n+1})
(Il s'agit d'une égalité modulo 10^{n+1} ; elle résulte du fait que cette égalité équivaut à $[x]_n=[y]_n$, puisque $[x]_n$ et $[y]_n$ sont ici des entiers naturels appartenant à $\{0;1;2;...;10^{n+1}-1\}$).

<u>Exemple</u> :
si pour tout $n \geq 1$ on a $[x]_n=12$, alors x=12, puisque pour tout $n \geq 1$ on a $12=[12]_n$ et donc $[x]_n=[12]_n$.

D1.2->**Addition de deux nombres décadiques**.
Pour additionner deux nombres décadiques x et y,...on fait comme d'habitude : on ajoute chiffre à chiffre, à partir de la droite et avec report de 1 sur la gauche lorsqu'on dépasse 10 (pour des nombres décadiques, avec effectivement chiffres après la virgule, et dont le rang du dernier chiffre non nul n'est pas le même :-r pour x et -r' pour y avec -r>-r', les chiffres de x+y de rang $\leq$-r-1 seront ceux de y : revient à dire que l'on "rajoute" des zéros après le dernier chiffre de x).

L'addition de deux nombres décadiques est donc un nombre décadique et cette addition prolonge évidemment celle de D :
le dernier chiffre, non nul, de x+y a un rang$\geq$min(-r,-r')
et cela revient à dire que, pour $n \geq \min(-r,-r')$, les chiffres de x+y de rang $\leq n$ sont les chiffres de $[x]_n+[y]_n$ de rang $\leq n$,
(il est évident que si $n' \geq n \geq \min(-r,-r')$, les chiffres de $[x]_{n'}+[y]_{n'}$ de rang $\leq n$ sont les chiffres de $[x]_n+[y]_n$ de rang $\leq n$)
et donc
$[x+y]_n=[x]_n+[y]_n+K\times10^{n+1}$ avec K=0 ou -1 ; (K=-1 ssi $[x]_n+[y]_n$ posséde un chiffre de rang n+1, qui ne peut être que 1).

Si x et y sont deux entiers décadiques (r=r'=0), x+y reste un entier décadique (car le dernier chiffre non nul a un rang≥min(-r,-r')=0) et **pour tout n≥0, $[x+y]_n$, $[x]_n$ et $[y]_n$ étant des entiers naturels**, l'égalité précédente se traduit par
pour tout n≥0, $[x+y]_n \equiv [x]_n+[y]_n$ (10^{n+1}) : il s'agit d'une égalité modulo 10^{n+1}
et aussi
pour tout n≥1, les n derniers chiffres de x+y sont les n derniers chiffres de $[x]_{n-1}+[y]_{n-1}$.

<u>Exemples</u> :
.....322,08+.....729,123=.....051,203 ;
.....(9)+1=0 ;(rappel .....(9) est l'entier décadique dont tous les chiffres sont 9)

P1.2-> Si x est un entier décadique, $[x]_{n+1}$ a pour n+1 derniers chiffres ceux de $[x]_n$, cad $[x]_{n+1} \equiv [x]_n$ (10^{n+1}), puisque $[x]_{n+1}=x_{n+1}10^{n+1}+[x]_n$, cela pour tout n ≥0.
La réciproque est vraie :
si $(u_n)_{n\in N}$ une suite d'entiers naturels telle que pour tout n≥0, u_n posséde n+1 chiffres (les premiers pouvant être nuls) et pour tout n≥0 u_{n+1} a pour n+1 derniers chiffres ceux de u_n ($u_{n+1}=a10^{n+1}+u_n$, avec a dans {0;1;...;9}), alors il existe un et un seul entier décadique x tel que pour tout n≥0 $[x]_n=u_n$: c'est x ayant pour chiffre de rang n, le chiffre de rang n de u_n.

<u>Exercice 1</u> : prouver P1.2.

<u>Exercice 2</u> : x et y étant deux entiers décadiques
1) montrer que si pour tout n≥0 on a $[x]_n+[y]_n=10^{n+1}+1$ alors x+y=1.
2) la réciproque est évidemment fausse (prendre x=1, y=0).
Mais si on exclut la possibilité (x,y)=(1,0) ou (0,1) est-ce que la réciproque est vraie?

<u>Exercice 3</u> : si x est un entier décadique simplifier x+c(x)+1 ; si x étant est dans NB(10) avec des chiffres après la virgule, simplifier x+c(x)+0,0...01 (tous les chiffres de ce dernier nombre sont nuls, sauf son dernier qui est 1 et dont le rang est le rang du dernier chiffre de x, par exemple si x=.....12,126 alors on considère 0,001)

<u>Exercice 4</u> : x et y sont ici deux nombres décimaux :
$x=x_p...x_0,x_{-1}...x_{-r}$ avec p et r≥0
$x=y_{p'}...y_0,y_{-1}...y_{-r'}$ avec p' et r'≥0
et x_p , $y_{p'}$, x_{-r} , $y_{-r'}$ sont non nuls si respectivement p, p', r, r' sont non nuls.
Il est évident que les chiffres de xy (produit habituel de deux décimaux) ont un rang ≥-r-r' et ≤p+p'+1.
Soit k=max(r,r') : montrer que pour tout n≥-r-r' les chiffres de xy de rang≤n sont les chiffres de $[x]_{n+k}[y]_{n+k}$ de rang≤n, c'est-à-dire $[xy]_n=[[x]_{n+k}[y]_{n+k}]_n$.
Rappel (voir D1.1) : si n+k≥ p alors $[x]_{n+k}=x$ et si n+k≥ p' alors $[y]_{n+k}=y$.

D1.3->**Multiplication de deux nombres décadiques**.
Là aussi, pour multiplier deux nombres décadiques entre eux, on fait comme d'habitude... du moins, lorsqu'on pose la multiplication!

C'est évidemment un peu rapide...! Formalisons un peu plus, en exploitant le résultat de l'exercice 4 ci-dessus.

Soient x et y deux nombres décadiques, les rangs de leurs derniers chiffres respectifs étant -r et -r', avec r et r' ≥0
Par définition xy est le nombre décadique tel que

il n'a pas de chiffre de rang <-r-r'
pour tout n≥-r-r', les chiffres de xy de rang≤n sont les chiffres de $[x]_{n+k}[y]_{n+k}$ (c'est le produit de deux nombres décimaux) de rang ≤n, avec k=max(r,r').

Bien entendu le rang du dernier chiffre de xy peut être >-r-r', celui de rang -r-r' pouvant en fait être nul, par exemple.

La cohérence de cette définition vient du fait que :
si n'≥n, les chiffres de $[x]_{n'+k}[y]_{n'+k}$ de rang≤n sont les chiffres de $[x]_{n+k}[y]_{n+k}$ de rang ≤n.
En effet, $u=[x]_{n'+k}$ et $v=[y]_{n'+k}$ sont des nombres décimaux et $[u]_{n+k}=[x]_{n+k}$, $[v]_{n+k}=[y]_{n+k}$; on applique alors le résultat de l'exercice 4 ci-dessus à u et v.

Cette multiplication prolonge celle de D

En effet, si x et y sont deux décimaux, pour n assez grand $[x]_{n+k}=x$ et $[y]_{n+k}=y$ (voir définition de $[]_n$ à D1.1) et donc xy (en tant que produit de deux nombres décadiques) a pour chiffres de rang≤n les chiffres de $[x]_{n+k}[y]_{n+k}=xy$ (en tant que produit de deux décimaux) de rang≤n.
Donc xy (en tant que produit de deux nombres décadiques)=xy (en tant que produit de deux décimaux).

Pour tout n≥-r-r', et avec toujours k=max(r,r'),
$[xy]_n=[x]_{n+k}[y]_{n+k}-K\times 10^{n+1}$, et K entier naturel

C'est une traduction immédiate de la définition du produit.

Exemple :
x=.....178,1437 et y=.....52,824 ; on a r=-4, r'=-3, -r-r'=-7, k=max(r,r')=4

n	n+k	$[x]_{n+k}[y]_{n+k}$	chiffres de xy de rang ≤n	état de connaissance de xy
-7	-3	0,0037×0,004=0,0000148	8	.....?,??????8
-6	-2	0,0437×0,024=0,0010488	88	.....?,?????88
-5	-1	0,1437×0,824=0,1184088	088	.....?,????088
-4	0	8,1437×2,824=22,9978088	8088	.....?,???8088
-3	1	78,1437×52,824=4127,8628088	28088	.....?,??28088
-2	2	178,1437×52,824=9410,2628088	628088	.....?,?628088
etc				

Bien entendu, si x et y avaient été égaux à respectivement 178,1437 et 52,824 alors on aurait eu $xy=[x]_2[y]_2$=9410,2628088.

Si x et y sont deux entiers décadiques (r=r'=0), xy reste un entier décadique (car il n'a pas de chiffre de rang <-r-r'=0), **et pour tout entier $n\geq0$ on a** (puisque r=r'=0 on a k=max(r,r')=0) :
les chiffres de xy de rang $\leq n$ sont les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang $\leq n$, et donc :
$\mathbf{[xy]_n=[x]_n[y]_n-K\times10^{n+1}}$, avec K entier naturel
et, $[xy]_n$, $[x]_n$ et $[y]_n$ étant des entiers naturels, l'égalité précédente se traduit par
pour tout $n\geq0$, $[xy]_n\equiv[x]_n[y]_n$ (10^{n+1}) : il s'agit d'une égalité modulo 10^{n+1}
et aussi (c'est une "redite" de : pour $n\geq0$, les chiffres de xy de rang $\leq n$ sont les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang $\leq n$)

pour tout $n\geq1$, les n derniers chiffres de xy sont les n derniers chiffres de $[x]_{n-1}[y]_{n-1}$ (et donc les n derniers chiffres de xy ne dépendent que des n derniers chiffres de x et de y).

Exemple :
les 6 derniers chiffres de .....(6)×.....(13) sont les 6 derniers chiffres de 666666×131313=87541912458, soient 912458 ; voir P3.8 : .....(6)×.....(13) est périodique!

Exercice 5 : vérifier que 3 (qui n'a pas d'inverse dans D) a un inverse dans NB(10) qui est .....(6)7, cad vérifier que .....(6)7×3=1.
Voir remarque de P2.5 pour des précisions sur la définition de l'inverse et voir P4.1 une méthode pour obtenir cet inverse.

Exercice 6 : montrer que si x est un entier décadique se terminant par 0 ou 2 ou 4 ou 5 ou 6 ou 8, alors il ne peut avoir un inverse qui soit entier décadique.
Voir remarque de P2.5 pour des précisions sur la définition de l'inverse.

Solution des exercices du chapitre 1

Exercice 1
L'hypothèse sur la suite u signifie que pour tout $n\geq k\geq0$, le chiffre de rang k de u_k est le chiffre de rang k de u_n, .
Considérons l'entier décadique x dont le chiffre x_n de rang n est le chiffre de rang n de u_n.
On alors $[x]_n=x_n10^n+x_{n-1}10^{n-1}+...+x_110+x_0$.
Mais pour $0\leq k\leq n$, x_k=chiffre de rang k de u_k=chiffre de rang k de u_n :
donc $[x]_n$ a exactement pour chiffres les chiffres respectifs de u_n : donc $[x]_n=u_n$.
Bien entendu, il ne peut y avoir d'autre entier décadique vérifiant cette propriété, car si y en était un autre, on aurait $[x]_n=[y]_n$ pour tout $n\geq0$ et x=y (voir P1.1).

Exercice 2
1) On a $[x]_n+[y]_n=10^{n+1}+1$; d'après D1.1, $[x+y]_n\equiv[x]_n+[y]_n$ (10^{n+1}).
Donc $[x+y]_n\equiv10^{n+1}+1\equiv1$ (10^{n+1}), donc $[x+y]_n=1$ (car ces deux nombres sont dans $\{0;1;...;10^{n+1}-1\}$) et donc pour tout $n\geq0$ on a $[x+y]_n=[1]_n$ et x+y=1.
2) En fait x+y=1 entraîne, pour tout $n\geq0$, $[x+y]_n=1$, $[x]_n+[y]_n\equiv1$ (10^{n+1}), donc $[x]_n+[y]_n=1+k_n10^{n+1}$; comme $[x]_n+[y]_n$ est dans $\{0;1;...;2\times10^{n+1}-2\}$, k_n=0 ou 1 : on ne peut conclure, même si (x,y) n'est ni (0,1), ni (1,0).
D'ailleurs si x=.....(2)001 et y=.....(9)8000 on a bien x+y=1, mais

$[x]_0+[y]_0=[x]_1+[y]_1=[x]_2+[y]_2=1$
alors que $[x]_3+[y]_3=10^4+1$ et $[x]_4+[y]_4=10^5+1$.

Exercice 3

On a évidemment x+c(x)+1=0 si x est entier décadique et sinon x+c(x)+0,0...01=0 (tous les chiffres de 0,0...01 sont nuls, sauf son dernier qui est 1 et dont le rang est le rang du dernier chiffre de x), puisque x+c(x) a tous ses chiffres égaux à 9, et en ajoutant, selon les cas, 1 ou 0,0...01, tous les chiffres deviennent 0 (à cause de la propagation sur la gauche du report de 1).
En toute rigueur, il aurait fallu justifier au préalable l'associativité de + : voir plus loin!.

Exercice 4

$x=[x]_{n+k}+u10^{n+k+1}$, $y=[y]_{n+k}+v10^{n+k+1}$, avec u et v entiers naturels.
Par exemple, si x=131,45082 et y=12,352 alors xy=1623,68052864 et $x=[x]_{-3}+u10^{-2}$ avec u=13145 puisque $[x]_{-3}$=082=82 et, $y=[y]_{-3}+v10^{-2}$ avec v=1235 puisque $[y]_{-3}$=0,002.
On a alors $xy=[x]_{n+k}[y]_{n+k}+A+B$ avec $A=10^{n+k+1}(v[x]_{n+k}+u[y]_{n+k})$ et $B=uv10^{2n+2k+2}$.
Si uv est non nul, B n'apporte que des chiffres de rang≥2n+2k+2≥n+2 (puisque n≥-r-r'≥-2k), et si uv=0, B n'apporte aucun chiffre.
Si u et v sont non nuls, $u[x]_{n+k}$ n'apporte que des chiffres de rang≥-r et $v[y]_{n+k}$ n'apporte que des chiffres de rang≥-r' et donc A n'apporte que des chiffres de rang≥n+k+1+min(-r,-r') =n+k+1-k=n+1 ; c'est encore vrai si un seul des nombres u et v est nul, et si u=v=0, A n'apporte aucun chiffre.
En conclusion, les chiffres de xy de rang≤n ne proviennent que de $[x]_{n+k}[y]_{n+k}$, ce qu'il fallait montrer.

<u>Remarque 1</u> : pour l'exemple ci-dessus (k=max(5,3)=5), les chiffres de xy de rang≤-5 sont les chiffres de $[x]_0[y]_0$=1,45082×2,352=3,41232864 de rang ≤-5 : c'est bien vrai puisque xy=1623,68052864 ; on notera que le chiffre de xy de rang -4 n'est pas le chiffre de $[x]_0[y]_0$ de rang -4.
<u>Remarque 2</u> : quoique cela ne soit pas vrai pour le cas ci-dessus il peut arriver que le chiffre de xy de rang n+1 soit celui de $[x]_{n+k}[y]_{n+k}$ de rang n+1 :
en considérant l'exemple ci-dessus mais pour n=-4, les chiffres de xy de rang≤-4 sont les chiffres de $[x]_1[y]_1=[x]_1y$=31,45082×12,352=388,48052864 de rang≤-4 : là, en plus, les chiffres de rang -3 et -2 sont respectivement identiques ; cela vient du fait qu'ici u=1, v=0, donc B n'apporte aucun chiffre et $A=10^2u[y]_1=10^2uy$=1235,2 n'apporte que des chiffres de rang≥-1.
Si on passe à n=-3, les chiffres de xy de rang≤-3 sont les chiffres de $[x]_2[y]_2$ de rang≤-3 : c'est évidemment vrai... puisque en fait $[x]_2$=x (donc u=0) et $[y]_2$=y (donc v=0)! Donc là, tous les chiffres de xy et $[x]_2[y]_2$ sont respectivement identiques.
En fait xy et $[x]_{n+k}[y]_{n+k}$ ont respectivement les mêmes chiffres ⇔ $xy=[x]_{n+k}[y]_{n+k}$⇔v=u=0⇔n+k≥max(p,p') : pour l'exemple précédent cela donne n≥-5+2=-3.

Exercice 5

Il s'agit de vérifier, en notant x=.....(6)7, que 3x=1 :
Pour n≥1, les n derniers chiffres de 3x sont les n derniers chiffres de $[3]_{n-1}[x]_{n-1}$=3×66...67 (il y a n-1 fois le chiffre 6 devant 7)=200...01 (n-1 fois le chiffre 0 entre 2 et 1).
Donc pour n≥1, le chiffre de rang n de 3x est 0 : donc 3x=.....(0)1=1.

Exercice 6

Soit a le dernier chiffre de x, et supposons que x admette un inverse 1/x qui soit aussi dans EN (10) ; si b est le dernier chiffre de 1/x, puisque x(1/x)=1, c'est que ab se termine par 1 (puisque [x

$(1/x)]_0=1\equiv[x]_0[1/x]_0=ab$ (10), donc ab-1 divisible par 10) ; ce qui est impossible, car vu le dernier chiffre a de x, ab est pair ou divisible par 5.

retour plan de cette page

2-Structure des ensembles des nombres et entiers décadiques

P2.1->**Les opérations internes + et ×, définies à D1.2 et D1.3 sont associatives, commutatives, d'éléments neutres respectifs 0 et 1.**
Pour tout k dans Z, pour tout x dans NB(10), on passe de x à $10^k x$ en déplacant la virgule de x de k positions (avec "rajout" éventuel de zéros) : vers la droite si k≥0, vers la gauche si k<0.

Exercice 1 : prouver P2.1.

P2.2->**Tout nombre décadique (ou brenom) x a un opposé x', unique, dans NB(10) : x'+x=x+x'=0.**
si x a effectivement des chiffres après la virgule alors x'=c(x)+0,0...01 (le rang du chiffre 1 est celui du dernier chiffre de x ; voir exercice 3 du chapitre 1 pour le fait que c'est un opposé) et **si x est entier décadique (ou brenom entier) alors x'=c(x)+1**.

Il est unique car si x" est un autre opposé on aurait x"+x=x+x"=0, donc x'+x=x"+x ; en ajoutant x' aux deux membres de cette égalité et compte tenu de l'associativité on obtient x'+(x+x')=x"+(x+x'), soit x'+0=x"+0 et x'=x".

Si x est dans NB(10) avec chiffres après la virgule : $x=.....x_2x_1x_0,x_{-1}x_{-2}...x_{-r}$ (avec r≥1 et x_{-r} non nul) alors $x'=.....x'_2x'_1x'_0,x'_{-1}x'_{-2}...x'_{-r}$ avec $x'_{-r}=10-x_{-r}$ et $x'_i=9-x_i$ pour i>-r.

Si x est dans EN(10) : $x=.....x_2x_1x_0$, alors $x'=.....x'_2x'_1x'_0$, avec, en notant k le plus petit entier ≥0 tel que x_k soit non nul, $x'_0=...=x'_{k-1}=0$ (si k=0 on n'a pas ce cas), $x'_k=10-x_k$ et pour i>k, $x'_i=9-x_i$

P2.3->**Si x est un décimal positif, x' a tous ses chiffres égaux à 9 à partir d'un certain rang : x' est donc périodique, de période 9**.

Et **si x est dans EN(10), x' est aussi dans EN(10)**, puisque dans ce cas x'=c(x)+1 et c(x) ∈EN(10).

D2.1->**On notera x'=-x et x-y signifiera x+(-y). Et donc, cf P2.2, si x∈EN(10), -x=c(x)+1.**

On peut dire maintenant

$$\boxed{D\subset NB(10) \text{ et } Z\subset NB(10)}$$

Exemples :

-.....(9)=1 ou .....(9)=-1

et aussi -123=.....(9)877 ; -9=.....(9)1 ; -12=.....(9)88 ; -20=.....(9)80 ; -123,564=.....(9) 876,436
Remarque : en posant la soustraction, on trouve 1-21=.....(9)80 et on retrouve -20=.....(9)80

P2.4->

Pour tout x et y dans EN(10) et pour tout n≥0 :

> **$[-x]_n \equiv -[x]_n\ (10^{n+1})$**
> **$[x-y]_n \equiv [x]_n-[y]_n\ (10^{n+1})$**
> **si en outre x et y ont même dernier chiffre alors x-y et y-x ont 0 comme dernier chiffre**

et aussi :

> **Pour tout entier relatif e et pour tout n≥0 : $e \equiv [e]_n\ (10^{n+1})$**

Exemples :
$[-123]_2=[.....(9)877]_2=877$, et comme $[123]_2=123$ et 877-(-123) est divisible par 10^4,
on a bien $[-123]_2 \equiv -[123]_2\ (10^4)$
Pour tout n≥0, $[-1]_n=[.....(9)]_n$=9...9 (n+1 fois le chiffre 9)$=10^{n+1}-1 \equiv -1\ (10^{n+1})$, et comme $[1]_n=1$, on a bien $[-1]_n \equiv -[1]_n\ (10^{n+1})$.

Exercice 2 : prouver P2.4.

P2.5->(NB(10),+,×) est un anneau (commutatif, unitaire), (EN(10),+,×) étant un sous anneau.

Exercice 1 (suite!) : prouver P2.5.

Remarque : un élément x de NB(10) est inversible signifie qu'il existe x' dans NB(10) tel que xx'=x'x=1 : x est donc non nul ; cet élément x' est alors unique (preuve analogue à celle de l'unicité de l'opposé) ; x' est appelé l'inverse de x et sera noté 1/x.
Si x est dans EN(10) et est inversible, son inverse n'est pas obligatoirement dans EN (10) : voir P4.2.
Un élément de EN(10) inversible et d'inverse dans EN(10) sera dit inversible dans EN (10).

Exercice 3 : pour ceux ayant des "doutes", x et y étant deux nombres décadiques quelconques,
1) montrer que (-x)y=x(-y)=-(xy) ; (-x)(-y)=xy ;
2) si x et y sont inversibles dans NB(10) montrer que xy est inversible, son inverse étant le produit des inverses.
3) Déduire de la question 1 que, dans NB(10), $(.....(9))^2=1$; (j'ai lu sur un site que cela restait une conjecture...) ; retrouver le résultat de deux autres manières :
a) en utilisant la régle sur $[\ ]_n$ (voir D1.3)
b) en posant la multiplication.

<u>Remarque</u> : on verra au chapitre 9, qu'en dehors de 1 et .....(9), il y a, uniquement, deux autres entiers décadiques dont le carré est 1!

<u>Exercice 4</u> : p étant un entier supérieur ou égal à 1, soit s=89...9 (il y a p-1 chiffres 9 après 8), et y=.....(s)9 (cad y est l'entier décadique de période s qui commence juste après devant le dernier chiffre 8) ; montrer que y est l'inverse (dans EN(10)) de 10^p-1. Donc, par exemple, dans EN(10)

9 a un inverse : 1/9=.....(8)9
99 a un inverse : 1/99=.....(89)9

<u>Exercice 5</u> : Un élément x de NB(10) est un diviseur de zéro signifie qu'il est non nul et qu'il existe y non nul dans NB(10) tel que xy=0.
Montrer qu'un diviseur de zéro ne peut avoir d'inverse.
<u>Remarque 1</u> : cette propriété est vraie dans tout anneau unitaire.
<u>Remarque 2</u> : on verra plus loin (chapitre 5) qu'il existe effectivement dans NB(10) des diviseurs de zéros et donc tout élément de NB(10) n'est pas forcément inversible.

<u>Exercice 6</u>
1) Soient y dans EN(10) et x dans NB(10) tels que x^2=y : montrer que x est dans EN(10).
2) x étant dans NB(10), montrer que $x^2=0\Leftrightarrow x=0$.
3) Montrer qu'il n'existe pas x dans NB(10) tel que x^2=-1
4) Montrer qu'il n'existe pas x dans NB(10) tel que x^2=-11
<u>Remarque</u> : on verra au chapitre 9 une condition nécessaire et suffisante pour que n dans Z admette des racines carrées dans NB(10), ainsi qu'une méthode pour obtenir le développement décadique de ces racines carrées.

<u>Exercice 7</u> : à titre de "révision", montrer qu'un nombre décimal, cad un nombre réel de la forme $a/10^n$ avec a dans Z et n dans N, est inversible (dans D) si et seulement si $a=e2^u5^v$, avec e=-1 ou 1, u et v dans N.

<u>Solution des exercices du chapitre 2</u>

<u>Exercice 1</u>
Il s'agit de démontrer d'abord P2.1, puis P2.5 (conséquence immédiate de P2.1) : on sera souvent amené à utiliser le fait que x=y équivaut à ce que pour n assez grand, $[x]_n=[y]_n$, et si x et y sont entiers décadiques, x=y équivaut à ce que pour n assez grand $[x]_n\equiv[y]_n$ (10^{n+1}) : voir P1.1.

R1 : commutativité de + et × dans NB(10)

Pour tout n≥0, x+y a pour chiffres de rang≤n les chiffres de $[x]_n+[y]_n$ de rang≤n, et y+x a pour chiffres de rang≤n les chiffres de $[y]_n+[x]_n$ de rang≤n :
la commutativité dans D donne alors $[x+y]_n=[y+x]_n$, pour tout n≥0 et donc x+y=y+x.

La commutativité de × dans NB(10) se fait de façon analogue à la preuve précédente.

R2 : associativité de + dans NB(10).

Tous les K_i qui apparaîtrons ci-dessous seront dans Z (voir D1.2).
Pour tout n≥0, $[(x+y)+z]_n=[x+y]_n+[z]_n+K_1 10^{n+1}=([x]_n+[y]_n+K_2 10^{n+1})+[z]_n+K_1 10^{n+1}$, et compte-tenu de l'associativité dans D on peut écrire

$[(x+y)+z]_n=[x]_n+[y]_n+[z]_n+K_3 10^{n+1}$.
De même $[x+(y+z)]_n=[x]_n+[y]_n+[z]_n+K_4 10^{n+1}$.
Donc $[x+(y+z)]_n-[(x+y)+z)]_n=K_5 10^{n+1}$, et comme $0\leq[]_n<10^{n+1}$ on a $|[x+(y+z)]_n-[(x+y)+z)]_n|<10^{n+1}$ et obligatoirement $K_5=0$; donc $[x+(y+z)]_n=[(x+y)+z)]_n$, cela pour tout $n\geq0$ et on a bien $x+(y+z)=(x+y)+z$.

L'associativité de × et la distributivité de × par rapport à + sont plus délicates à établir, à cause du n+max(r,r') qui intervient dans la multiplication ; par contre si on se limite, dans un premier temps aux entiers décadiques, c'est immédiat, car on peut alors utiliser les propriétés des congruences.

R3 : associativité de × dans EN(10)

Pour tout $n\geq0$: $[x(yz)]_n\equiv[x]_n[yz]_n\equiv[x]_n([y]_n[z]_n)$ (10^{n+1}) ; mais les congruences sont associatives et donc
$[x(yz)]_n\equiv[x]_n[y]_n[z]_n$ (10^{n+1})
de même, modulo (10^{n+1}), $[(xy)z)]_n\equiv[x]_n[y]_n[z]_n$ et $[x(yz)]_n\equiv[(xy)z]_n$, et donc $x(yz)=(xy)z$.

R4 : distributivité de × par rapport à + dans EN(10)

On procéde comme pour R3.
Pour tout $n\geq0$:
$[x(y+z)]_n\equiv[x]_n[y+z]_n\equiv[x]_n([y]_n+[z]_n)$ (10^{n+1}) ; mais on peut distribuer les congruences et donc

$[x(y+z)]_n\equiv[x]_n[y]_n+[x]_n[z]_n$ (10^{n+1}).
Par ailleurs $[xy+xz]_n\equiv[xy]_n+[x]_n[z]_n\equiv[x]_n[y]_n+[x]_n[z]_n$ (10^{n+1}) ; et donc
$[x(y+z)]_n\equiv[xy+xz]_n$ (10^{n+1}) et $x(y+z)=xy+xz$.

Pour arriver à l'associativité et à la distributivité dans NB(10), je vais établir quelques "petits" résultats sur les puissances de 10 : ils peuvent sembler triviaux à priori, mais encore faut-il ... les montrer. Seul, le R5.4 est "longuet". Je commencerai par celui énoncé dans P2.1.

R5

R5.1 : pour tout s dans Z^*, pour tout x dans NB(10), on passe de x à $10^s x$ en déplacant la virgule de x de s positions (avec "rajout" éventuel de zéros) : vers la droite si s>0, vers la gauche si s<0.

Il suffit de le montrer pour s=1 et s=-1 ; on considère x dans NB(10) dont le dernier chiffre a pour rang $-r\leq0$.
Soit k=max(1,r).
Pour s=1 : pour tout $n\geq1$, les chiffres de 10x de rang≤n sont les chiffres de $[10]_{n+k}[x]_{n+k}=10[x]_{n+k}=x_{n+k}...x_0x_{-1},x_{-2}...x_{-r}$ de rang $\leq n$, ce qui prouve le résultat.

Pour s=-1 : pour tout $n\geq1$, les chiffres de 0,1x de rang $\leq n$ sont les chiffres de $[0,1]_{n+k}[x]_{n+k}=0,1[x]_{n+k}=x_{n+k}...x_1,x_0...x_{-r}$ de rang≤n, ce qui prouve le résultat.

R5.2 : pour tout entier relatif n, pour tout x dans NB(10), $[10x]_n=10[x]_{n-1}$

Evident ; rappel, si n<rang du dernier chiffre de z, $[z]_n$ est pris égal à 0, voir D1.1.

R5.3 : pour tout s et s' dans Z, pour tout x dans NB(10), $10^s(10^{s'}x)=10^{s+s'}x$

On exploite deux fois de suite R5.1 : pour le membre de gauche, c'est x avec la virgule décalée d'abord de s', puis de s positions la virgule, donc c'est le membre de gauche.

R5.4 : pour tout x et tout y dans NB(10), x(10y)=(10x)y=10(xy)

Vu la commutativité de × dans NB(10), voir R1, il suffit de montrer que x(10y)=10 (xy).

On notera -r et -r', tous les deux négatifs ou nuls, les rangs respectifs des derniers chiffres de x et y, et k=max(r,r').

n étant un entier naturel assez grand :

les chiffres de x(10y) de rang≤n sont les chiffres de $[x]_{n+k'}[10y]_{n+k'}$ de rang≤n, avec k'=max(r,r'-1), cf R5.1. Mais $[10y]_{n+k'}=10[y]_{n+k'-1}$, cf R5.2 et donc

les chiffres de x(10y) de rang≤n sont les chiffres de $G=[x]_{n+k'}[y]_{n+k'-1}$ de rang≤n-1.

Quant aux chiffres de 10(xy) de rang≤n ce sont (cf R5.1) les chiffres de xy de rang≤n-1, soit les chiffres de $D=[x]_{n-1+k}[y]_{n-1+k}$ de rang≤n-1.

Si r≥r' alors k=k'=r et

$G=[x]_{n+k}[y]_{n+k-1}$; mais le chiffre x_{n+k} de rang n+k de $[x]_{n+k}$ ne va "jouer" dans la × que sur des chiffres de rang≥n+k-r'≥n, et donc les chiffres de G de rang≤n-1 sont en fait les chiffres de D de rang≤n-1.

Si r<r', soit r≤r'-1 alors k'=r'-1, k=r', k'=k-1 et

$G=[x]_{n+k-1}[y]_{n+k-2}$ et $D=[x]_{n-1+k}[y]_{n-1+k}$; mais le chiffre y_{n-1+k} de rang n-1+k de $[y]_{n-1+k}$ ne va "jouer" dans la × de D que sur des chiffres de rang≥n-1+k-r>n-1 et donc les chiffres de D de rang≤n-1 sont les chiffres de G de rang≤n-1.

Donc G et D ont toujours les mêmes chiffres de rang≤n-1, et ainsi x(10y) et 10(xy) ont les mêmes chiffres de rang≤n, cela pour n quelconque assez grand, ce qui prouve x(10y)=10(xy).

R5.5 : pour tout s dans N, pour tout x et tout y dans NB(10), $(10^s x)y=10^s(xy)$

Par récurrence :

c'est vrai si s=0, s=1

supposons le résultat vrai pour s≥0 :

$(10^{s+1}x)y=(10(10^s x))y$, cf R5.3, $=10((10^s x)y)$, cf R5.4, $=10(10^s(xy))$, cf hypothèse de récurrence, $=10^{s+1}(xy)$, cf R5.4, et ainsi le résultat est vrai pour s+1.

R5.6 : pour tout s et s' dans N, pour tout x et y dans NB(10), $(10^s x)(10^{s'}y)=10^{s+s'}(xy)$

$(10^s x)(10^{s'}y)=10^s(x(10^{s'}y))$, cf R5.5, $=10^s((10^{s'}y)x)=10^s(10^{s'}(yx))$, cf R5.5, $=10^{s+s'}(yx)$ cf R5.3

R5.7 : pour tout s dans N, pour tout x et tout y dans NB(10), $10^s(x+y)=10^s x+10^s y$

Il est clair, cf R5.1 que $10^s x+10^s y$ a exactement les mêmes chiffres que x+y, au décalage près de s positions vers la droite de la virgule (il "suffit de l'écrire pour le voir") et donc $10^s x+10^s y=10^s(x+y)$.

<u>Remarque</u> : on pouvait penser aussi à écrire $10^s(x+y)=(x+y)+(x+y)+(x+y)+...(x+y)$, et comme + est associative, on peut supprimer les parenthèses, et la commutativité de + permet de regrouper les x et les y d'où le résultat ; cependant l'égalité $10^s(x+y)=(x+y)+(x+y)+(x+y)+...(x+y)$ repose en fait sur la distributivité (à droite) car $10^s(x+y)=(1+...+1)(x+y)$, distributivité non encore prouvée!

R7 (enfin!) : × est associative dans NB(10) et × est distributive par rapport à + dans NB(10)

Soient x,y,z quelconques dans NB(10) : il existe r dans N tel que $10^r x$, $10^r y$, $10^r z$ soient dans EN(10) :

R3 donne $(10^r x)((10^r y)(10^r z))=((10^r x)(10^r y))(10^r z)$

puis R5.6 donne $(10^r x)(10^{2r}(yz))=(10^{2r}(xy))(10^r z)$

puis R5.6 donne $10^{3r}(x(yz))=10^{3r}((xy)z)$
On termine en multipliant des deux côtés par 10^{-3r} et on applique R5.3 : $x(yz)=(xy)z$.
Remarque : je ne parle pas ici d'inverse, car cet aspect n'a pas encore été développé.

Même technique pour la distibutivité :
R4 donne $(10^rx)((10^ry)+(10^rz))=(10^rx)(10^ry)+(10^rx)(10^rz)$
R5.7 et R5.6 donnent $(10^rx)(10^r(y+z))=10^{2r}(xy)+10^{2r}(xz)$
R5.6 et R5.7 donnent $10^{2r}(x(y+z))=10^{2r}((xy)+(yz))$
et comme ci-dessus, en multipliant des deux côtés par 10^{-2r}, on obtiient $x(y+z)=xy+xz$.
Bien entendu, la disributivité à droite résulte de la commutativité de × :
$(x+y)z=z(x+y)=zx+zy=xz+yz$.

Terminons par la justification de P2.5 :
(NB(10),+) est, d'après P2.1 (qui vient d'être prouvé) et P2.2, un groupe commutatif additif, et comme la × est interne et est distributive par rapport à +, (NB(10),+,×) est un anneau. Il est commutatif, car la multiplication est commutative, et évidemment unitaire, car 1 est neutre pour la multiplication.
La somme et le produit de deux entiers décadiques étant des entiers décadiques, ainsi que l'opposé d'un entier décadique, (EN(10),+,×) est un sous-anneau de (NB(10),+×).

Exercice 2
x étant un entier décadique, $-x=c(x)+1$, ce qui donne, pour tout $n\geq 0$
$[-x]_n\equiv[c(x)]_n+[1]_n\ (10^{n+1})$; mais $[1]_n=1$ et $[-x]_n\equiv[c(x)]_n+1\ (10^{n+1})$.
Comme $x+c(x)=.....(9)$, on a $[x+c(x)]_n=10^{n+1}-1\equiv-1\ (10^{n+1})$, soit $[x]_n+[c(x)]_n\equiv-1\ (10^{n+1})$,
puis $[c(x)]_n+1\equiv-[x]_n\ (10^{n+1})$ d'où $[-x]_n\equiv-[x]_n\ (10^{n+1})$.

$[x-y]_n=[x+(-y)]_n\equiv[x]_n+[-y]_n\equiv[x]_n-[y]_n\ (10^{n+1})$

Si x et y ont même dernier chiffre alors $[x]_0=[y]_0$, donc $[x-y]_0\equiv[x]_0-[y]_0=0\ (10)$ et comme $[x-y]_0$ est dans {0;1;2;...;9} on a $[x-y]_0=0$: x-y se termine par 0.

Si e est un entier naturel (s'écrivant avec k chiffres dans l'écriture décimale habituelle), on a évidemment pour tout $n\geq 0$, $e\equiv[e]_n\ (10^{n+1})$, puisque $e=K\times10^{n+1}+[e]_n$, avec K dans N (K=0 si $n+1\geq k$).
Par contre si e est un entier relatif négatif, c'est moins immédiat.
En fait puisque $-e>0$ on a $-e\equiv[-e]_n\ (10^{n+1})$, et la propriété précédente dit que $[-e]_n\equiv-[e]_n\ (10^{n+1})$, ce qui donne bien $e\equiv[e]_n\ (10^{n+1})$.

Exercice 3
Pour plus de clarté notons x' et y' les opposés de x et y.
1) $x+x'=0$ donne $xy+x'y=0$ et $y+y'=0$ donne $xy+xy'=0$; l'unicité de l'opposé donne $x'y=xy'=-(xy)$ soit $(-x)y=x(-y)=-(xy)$
Et en remplacant y par - y dans $(-x)y=x(-y)$ on obtient $(-x)(-y)=xy$
2) Les égalités $x(1/x)=1$ et $y(1/y)=1$ multipliées membres à membres donnent $xy(1/x)(1/y)=1$: xy est donc inversible, son inverse étant $(1/x)(1/y)$
3) On a $.....(9)=-1$, donc $(.....(9))^2=(-1)(-1)=1$, cf la question 1.

preuve en utilisant D1.3 :
notons $x=.....(9)$
Pour tout $n\geq 0$, les chiffres de x^2 de rang $\leq n$ sont les chiffres de $([x]_n)^2$ de rang $\leq n$.
Or $([x]_n)^2=9...9^2$ (il y a n+1 chiffres 9)

$=(10^{n+1}-1)^2=10^{2n+2}-2\times10^{n+1}+1=9...980...01$ (il y a n chiffres 9 et n zéros entre 8 et 1).
Donc les chiffres x^2 de rang $\leq n$ sont 0...01 (il y a n zéros devant 1, cad aucun si n=0), donc si $n\geq1$ le chiffre de rang n de x^2 est 0 ; donc $x^2=1$.

preuve en posant la multiplication :

```
....9999999
....9999999
___________
...99999991 (car (.....(9))×9=.....(9)1
..99999991
.99999991
99999991
etc
__________
.......0001
```

En fait lorsqu'on additionne les lignes de la multiplication
la 1ère retenue est 1 et on a donc comme addition : 9+9+1+1=20, d'où on "pose" 0 et
la 2ième retenue est 2 et on a donc comme addition : 9+9+9+1+2=30, d'où on "pose" 0 et
la 3ième retenue est 3 et on a donc comme addition 9+9+9+9+1+3=40, d'où on "pose" 0 et
etc
et d'une façon générale, puisque $n\times9+1+(n-1)=n\times10$, tous les chiffres du résultat situés à gauche de 1 seront nuls : $(.....(9))^2=1$

Exercice 4

$(10^p-1)y=10^py-y=.....(s)90...0-.....(s)9$ (il y a p zéros à droite du 1er neuf)
comme les entiers naturels 90...0 et s9=89...9 (il y a p neuf à droite du 8) ont tous les deux p+1 chiffres, et que le premier est supérieur au second, on a
$10^py-y=90...0-89...9=1$.

Exercice 5

Soit x un diviseur de zéro : x est non nul et il existe y non nul avec xy=0.
Si x avait un inverse,1/x, dans NB(10), alors (1/x)(xy)=0, puis ((1/x)x)y=0, soit 1×y=0 et y=0, donc contradiction : x ne peut avoir d'inverse dans NB(10), ni y d'ailleurs.

Exercice 6

1) Si x a r chiffres ($r\geq1$) après la virgule, x^2 a 2r chiffres après la virgule, donc n'est pas un entier décadique, et donc x^2 ne peut être égal à y : x ne doit avoir aucun chiffre après la virgule pour que $x^2=y$.
2) Soit x un entier décadique non nul : il s'écrit alors $x=10^kx'$ avec x' entier décadique ne se terminant pas par 0 (k est le rang du dernier chiffre non nul de x) et ainsi $x^2=10^{2k}x'^2$, avec x'^2 non nul, puisque son dernier chiffre est non nul et donc $x^2\neq0$.
D'où si $x^2=0$, on a x entier décadique, cf le 1), et, cf ce qui précéde, x=0.
3) Cf le 1) x ne peut être qu'entier décadique et cf D1.1, D1.3, P2.4 :
$x^2=-1\Leftrightarrow$ pour tout $n\geq0$, $[x^2]_n\equiv[-1]_n\ (10^{n+1})\Leftrightarrow([x]_n)^2\equiv-[1]_n=-1\ (10^{n+1})$

n=0 donne $(x_0)^2\equiv-1\ (10)$, soit $x_0=3$ ou 7 :

si $x_0=3$
n=1 donne $(10x_1+3)^2\equiv-1\ (100)$, soit $60x_1\equiv-10\ (100)$, soit $6x_1\equiv-1\ (10)$, ce qui est impossible, 2 ne divisant pas -1.

si $x_0=7$

n=1 donne $(10x_1+7)^2\equiv-1$ (100), soit $140x_1\equiv-50$ (100), soit $14x_1\equiv-5$ (10), ce qui est impossible, 2 ne divisant pas -5.

Donc il n'existe pas x dans NB(10) tel que $x^2=-1$.
4) $x^2=-11 \Leftrightarrow$ x est entier décadique et pour tout $n\geq0$ $([x]_n)^2\equiv -[11]_n$ (10^{n+1}).

n=0 donne $(x_0)^2\equiv-1$ (10), soit $x_0=3$ ou 7 :

si $x_0=3$

n=1 donne $(10x_1+3)^2\equiv-11$ (100), soit $60x_1\equiv-20$ (100), soit $6x_1\equiv-2$ (10), et là on peut diviser par 2 : $3x_1\equiv-1$ (5), et en multipliant par 2, $x_1\equiv-2$ (5), (puisque 6 c'est 1 modulo 5), et $x_1=3$ ou 8 :

si $x_1=3$

n=2 donne $(100x_2+33)^2\equiv-11$ (1000), $6600x_2\equiv-1100$ (1000) et $66x_2\equiv-11$ (10), ce qui est impossible, 2 ne divisant pas -11.

si $x_1=8$

n=2 donne $(100x_2+83)^2\equiv-11$ (1000), $16600x_2\equiv-6900$ (1000), soit $166x_2\equiv-69$ (10), ce qui est impossible, 2 ne divisant pas -69.

si $x_0=7$

n=1 donne $(10x_1+7)^2\equiv-11$ (100), soit $140x_1\equiv-60$ (100), soit $14x_1\equiv-6$ (10), et là on peut diviser par 2 : $7x_1\equiv-3$ (5), soit $2x_1\equiv2$ (5), soit en multipliant par 3, $x_1\equiv1$ (5), (puisque 6 c'est 1 modulo 5), et $x_1=1$ ou 6 :

si $x_1=1$

n=2 donne $(100x_2+17)^2\equiv-11$ (1000), $3400x_2\equiv-300$ (1000) et $34x_2\equiv-3$ (10), ce qui est impossible, 2 ne divisant pas -3.

si $x_1=6$

n=2 donne $(100x_2+67)^2\equiv-11$ (1000), $13400x_2\equiv-4500$ (1000), soit $134x_2\equiv-45$ (10), ce qui est impossible, 2 ne divisant pas -45.

Donc il n'existe pas x dans NB(10) tel que $x^2=-11$.

Exercice 7

Si $x=a/10^n$ est inversible dans D alors il existe a' dans Z et n' dans N tel que $aa'/10^{n+n'}=1$, soit $aa'=10^{n+n'}$, donc les diviseurs 1er de a ne peuvent être que 2 et 5, donc a est nécessairement de la forme $a=e2^u5^v$, avec e=-1 ou 1, u et v dans N.
Réciproquement, si a est de cette forme alors $1/x=e2^{n-u}5^{n-v}$: mais n-u et/ou n-v peuvent être négatifs et on ne peut conclure, tout de suite, que 1/x est un nombre décimal.
Prenons n'=max(0,u-n,v-n) qui est positif ou nul ; on a alors $1/x=e2^{n'+n-u}5^{n'+n-v}/10^{n'}$, et comme $n'+n-u\geq0$ et $n'+n-v\geq0$, 1/x est bien un nombre décimal.

retour plan de cette page

3-Nombres décadiques périodiques

P3.1-> **Quelque soit l'entier naturel p≥1, l'entier décadique (ou brenom entier) 10^p-1 a un inverse qui est un entier décadique périodique ; cet inverse est .....(s)9 où s est l'entier naturel 89...9 (il y a p-1 fois le chiffre 9)** ; voir exercice 4 du chapitre 2.

Exemple :
1/9=.....(8)9 ; 1/99=.....(89)9 ; voir exemple de P4.1 pour le calcul de 1/99 en posant la division.
On en déduit donc -1/9=.....(1)1=.....(1) et -1/99=.....(10)1=.....(01)
De -1/9=.....(1) on déduit que **l'inverse de .....(1) est -9=.....(9)1, soit 1/(.....(1))=.....(9)1** ; on peut le vérifier en posant la multiplication .....(1)×.....(9)1.
Une autre façon d'obtenir -1/9=.....(1) est de remarquer que 9×.....(1)=.....(9)=-1 (voir D2.1)

P3.2-> On a vu (voir D2.1) que -1=.....(9). Cela se généralise :

Pour tout entier naturel s s'écrivant avec p chiffres (en base 10, bien sûr), on a

.....(s)=-s/(10^p-1)

Si on fait s=9 (donc p=1) on retrouve .....(9)=-1.
Remarque : **dans R, s/(10^p-1)=0,(s).....** ;
Exemples :
1) s=1 redonne x=.....(1)=-1/9 (voir exemple de P3.1)
2) .....(37)=-37/99, soit 37/99=-.....(37)=.....(62)63 (alors que dans R, 37/99=0,(37).....).

Exercice 1 : prouver P3.2 ; puis calculer 99×62626263 et retrouver le fait que, dans NB(10), 37/99=.....(62)63.

P3.3-> **si x est un nombre décadique (ou brenom) périodique**

pour tout n dans Z, 10^nx est périodique
-x est périodique .

Exercice 2 : prouver P3.3.

P3.4-> **La somme de deux nombres décadiques périodiques est périodique**.

Exercice 3 : prouver P3.4.

P3.5-> **Tout nombre décadique (le rang de son dernier chiffre étant -r, avec r≥0), périodique (de période comportant p chiffres, p≥1), s'écrit e×a×$(10^p-1)^{-1}$×10^{-r}, avec a entier naturel et e=-1 ou 1**.

Exemple
.....(2)1,3=.....(2)×10+1,3=(-2/(10^2-1))×10+1,3 (cf P3.2)=(-20+128,7)/(10^2-1)=1087/((10^2-1)×10)=1087/990
Remarque :
le résultat est bien vrai pour un entier naturel : par exemple pour 123 on a r=0, p=1 (période=0) et on prend e=1, a=123×(10^1-1).

Exercice 4 : prouver P3.5.

Exercice 5 : prouver que dans NB(10) on a 12/99+835/999=957047/999999
1ière méthode : utiliser ce qui précéde.
2ième méthode : prouver d'abord cette relation dans R.

Exercice 6 : encore à titre de révision, n étant un entier naturel non nul, on sait que 1/n a (**dans R**, comme tout nombre rationnel) un développement décimal périodique : montrer qu'il a une période qui commence juste après la virgule si et seulement si n est 1er avec n. C'est le cas par exemple de 1/7=0,142857142857142857142857.....=0,(142857)..... ou de 1/13=0,(076923).....

Remarque : ce résultat va servir pour la preuve de la propriété suivante.

P3.6-> **Tout entier naturel n non nul** (un entier naturel est bien un nombre décadique puisque c'est un entier décadique, avec un nombre fini de chiffres) **est inversible** ; mais son inverse n'est pas toujours un entier décadique.
Il y a donc deux cas :

> **1er cas : si n se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9 (cad n est 1er avec 10) alors il a un inverse dans NB(10) : cet inverse est en fait dans EN(10) et est périodique.**
> **Précisons cet inverse :**
> **dans R, 1/n a un développement décimal commencant immédiatement aprés la virgule : 1/n=0,(s)..... ; on a alors dans EN(10), 1/n=.....(s')D avec s'=c(s) et D=s'+1.**

Rappel : une période du développement décimal, dans R, de a/b (a dans Z, b dans N^*) peut s'obtenir à l'aide d'une succession de divisions euclidiennes bien choisies ; cela permet d'ailleurs de prouver effectivement cette périodicité du développement : voir, par exemple, Arithmétique pour Amateur de Marc Guinot.

Exemples :
dans R, 1/3=0,(3)..... ; dans EN(10) 1/3=.....(6)7
et dans R,1/7=0,(142857)..... ; dans EN(10) 1/7=.....(857142)857143=.....(285714)3

Voir exemple de P4.1 pour l'obtention du développement de 1/7 dans EN(10), en posant la division.

Voir exercice 3 du chapitre 7 pour le développement (dans EN(10)) de 1/19.

Voir aussi l'exercice 4 du chapitre 2 pour l'inverse (dans EN(10)) de 10^p-1.

> **2ième cas : si n se termine par 0 ou 2 ou 4 ou 5 ou 6 ou 8 (cad n n'est pas 1er avec 10), alors n a un inverse dans NB(10) qui est aussi périodique, mais n'est pas un entier décadique.**
> **Cet inverse aura les mêmes chiffres que l'inverse de n dans R ⇔ $n=2^u5^v$, avec u et v entiers naturels.**

Remarque : voir l'exercice 4 du chapitre 1 où il a été prouvé que si un entier décadique (ne se réduisant pas forcément à un entier naturel) se termine par 0 ou 2 ou 4 ou 5 ou 6 ou 8 et s'il est inversible, alors son inverse n'est pas dans EN(10).

Exemples :
dans NB(10), comme dans R, on a (car les nombres sont de la forme requise) :

1/2=.....(0),5=0,5 ; 1/4=.....(0),25=0,25 ; 1/10=.....(0)1=0,1
et plus généralement, pour tout entier naturel n, que l'on se place dans R ou EN(10), on a :
$1/10^n=0,0...01=10^{-n}$, $1/2^n=2^{-n}=5^n10^{-n}$, $1/5^n=5^{-n}=2^n10^{-n}$

Par contre :
1/6=(1/3)×(1/2)=.....(6)7×0,5=.....(3),5 : ce qui n'est pas le développement décimal de 1/6 dans R
1/60=(1/10)×(1/6)=.....(3),35 : ce qui n'est pas le développement décimal de 1/60 dans R

> **Tout entier relatif n<0** (un entier relatif négatif est bien un nombre décadique puisque c'est un entier décadique, avec une infinité de chiffres car il est de période 9 : voir P2.2, P2.3, D2.1) **est inversible**.
> **Cet inverse sera entier décadique⇔-n se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9**.

C'est une conséquence immédiate de ce qui précéde : -n est un entier naturel non nul, donc il posséde un inverse 1/(-n) et n a pour inverse -1/(-n), qui sera entier décadique ssi 1/(-n) l'est, cad, ssi -n (entier naturel) se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9, ce qui équivaut d'ailleurs à ce que n se termine (en tant qu'entier décadique) par 1 ou 3 ou 7 ou 9.

Exercice 7 : prouver P3.6.

P3.7-> **Les nombres décadiques périodiques sont les rationnels décadiques, cad les nombres décadiques de la forme p/q=p×(1/q) avec p dans Z, q dans N^* et 1/q étant l'inverse de q dans NB(10)**.

Remarque : la preuve de P3.7 utilise P3.3 (x périodique entraîne -x périodique) et P3.4 (la somme de deux nombres décadiques périodiques est périodique) ; évidemment P3.7 redonne aussitôt ces résultats, l'opposé d'un rationnel décadique étant un rationnel décadique, de même pour la somme de deux rationnels décadiques.

Exercice 8 : prouver P3.7.

P3.8-> **Le produit de deux nombres décadiques périodiques est périodique** (c'est évident d'apès P3.7, le produit de deux rationnels décadiques étant rationnel décadique).

Exercice 9 :
n étant un entier naturel constitué de 3 chiffres a, b, c, c'est-à-dire n="abc" avec a non nul, vérifier que .....(1)×n est effectivement périodique et en donner une période en fonction de a, b et c.

P3.9-> **Le sous-ensemble P(10) de NB(10) constitué des nombres décadiques périodiques est un corps**.
C'est évident, car vu la stabilité de + et x, P(10) est un sous-anneau de NB(10) et tout élément, non nul, de P(10) s'écrivant p/q=p×(1/q) avec, p dans Z^*, q dans N^*, 1/q inverse de q dans NB(10), admet un inverse (1/p)×q, avec 1/p inverse de p dans NB(10), inverse qui est bien dans P(10), puisque c'est q/p, rationnel décadique.

Remarque 1 : pour expliciter l'inverse d'un nombre périodique x on peut utiliser la formule du P3.5 et le fait que l'inverse d'un produit est le produit des inverses, soit
$1/x= e\times(1/a)\times(10^p-1)\times10^r$, puisque 1/e=e et pour 1/a on utilise P3.6.

Remarque 2 : **P(10) n'a aucun diviseur de zéro**, puisque tout élément non nul de P(10) admet un inverse (voir exercice 4 du chapitre 2).

Solution des exercices du chapitre 3

Exercice 1

Soit x=.....(s) : $x-10^p x$=.....(s)-.....(s)0...0 (il y a p zéros à droite de (s)) et donc $x(1-10^p)=s$ ou $x(10^p-1)=-s$.
Comme 10^p-1 a un inverse dans l'ensemble des nombres décadiques (voir P3.1), et en notant $1/(10^p-1)$ cet inverse on a, on a $x=-s/(10^p-1)$

99×62626263=6200000037 ; je laisse le lecteur vérifier que 99×62...6263 (n blocs 62 devant 63) est égal à k_n=620...037 (2n zéros entre 62 et 37 ; le premier zéro a pour rang 2n+1, le dernier a pour rang 2).
Pour obtenir ce résultat il suffit de remplacer 99 par 100-1.
Donc si x=.....(62)63, on a pour tout n ≥0 $[99]_{2n+1}[x]_{2n+1}=99[x]_{2n+1}=k_n$; comme les chiffres de 99x de rang ≤2n+1 sont les chiffres de $[99]_{2n+1}[x]_{2n+1}=k_n$ de rang ≤2n+1, pour tout n≥1, les chiffres de 99x de rang 2 à 2n+1 sont nuls, en particulier les chiffres de rang 2n et 2n+1 : pour tout n≥2, le chiffre de rang n de 99x est 0, donc 99x=37.

Exercice 2

Soit x dans NB(10) et périodique.
Multiplier x par 10^n, avec n dans Z, revient à déplacer la virgule de p positions (voir P2.1), donc la suite des chiffres reste périodique à partir d'un certain rang (sur la gauche), et ainsi $10^n x$ est bien périodique.
Choisisons p tel que $y=10^p x$ soit entier décadique : -y=c(y)+1.
D'après ce qui précéde y est périodique : y=.....(s)d, avec (s) apparition d'une dernière période et d l'entier naturel constitué des k chiffres situés après cette période.
c(y)=.....(s')d' avec s' et d' complémentaires de s et d (chaque chiffre de s et d est remplacé par son complémentaire à 9).
Considérons c(y)+1 : il y a trois cas

- soit d'<9...9 (k chiffres 9) et alors d'+1 reste sur k chiffres et c(y)+1 est périodique de période s' : c(y)+1= .....(s')[d'+1] où [d+1] est l'entier naturel d+1.
- soit d'=9...9 : dans ce cas d'+1 provoque un report de 1 sur le dernier chiffre de la dernière apparition de s'
  - soit s'<9...9 (autant de 9 que le nombre de chiffres de s') et alors s'+1 ne provoque pas de report sur l'avant-dernière période, et c(y)+1 est encore périodique de période s' : .....(s')[s'+1]0...0
  - soit s'=9...9 : donc c'est que c(y) est constitué que de 9 et alors c(y)+1=0, périodique

Donc -y=c(y)+1 est toujours périodique et $-x=10^{-p}(-y)$ est donc périodique.

Exercice 3

Soient x et y deux nombres décadiques périodiques.

1er cas : x et y sont entiers décadiques, leurs dernières périodes correspondant à leurs derniers chiffres :

x=.....(s) et y=.....(s') avec s sur p chiffres et s' sur p' chiffres.
Soit m=ppcm(p,p') : donc il existe k et k' tels que pk=m et p'k'=m.

On additionne x et y, en regardant ce qui se passe par tranches de m chiffres :
chaque tranche de m chiffres (à partir de la droite évidemment) de x comporte k périodes et correspond à un entier naturel N=s...s (k fois s), et pour y c'est k' périodes et N'=s'...s' (k' fois s')

si N+N' reste sur m chiffres, x+y est de période N+N' : x+y=.....(N+N')
si N+N' provoque un report de 1 sur le dernier chiffre de la tranche suivante de m chiffres de x+y, alors les m chiffres suivants de x+y sont les m derniers chiffres de N+N'+1 ; mais ce N+N'+1 va encore provoquer un report de 1 sur le dernier chiffre de la tranche suivante de m chiffres de x+y, etc : x+y est bien périodique : x+y=.....(M) D, avec M=les m derniers chiffres de N+N'+1 et D les m derniers chiffres de N+N'.

Exemple 1 : x=.....(835) y=.....(12) : ici s=835, s'= 12, m=6, N=835835, N'=121212 ; donc N+N'=957047 qui reste sur 6 chiffres :
x+y=.....(957047)
Exemple 2 : x=.....(8421) y=.....(35) : ici s=8421, s'=35, m=4, N=8421, N'=3535 ; donc N+N'=11956 qui ne reste pas sur 4 chiffres, il y a report de 1 :
x+y=.....(1957)1956

2ième cas : x entier décadique périodique, sa dernière période correspondant à ses derniers chiffres et y entier naturel (il est bien périodique : de période 0) :

x=.....(s) avec s sur p chiffres et y est sur p'chiffres.
Soit k le plus petit entier tel que kp>k' et N l'entier obtenu par juxtaposition de k périodes s :
x=.....(s)N

si N+y reste sur kp chiffres alors x+y est de période s, commencant juste avant ses kp derniers chiffres (ceux de N+y)
Exemple : x=.....(132), y=12 : x+y=.....(132)144
si N+y occupe kp+1 chiffres (nécessairement le 1er chiffre de N, donc de le 1er chiffre de s, est 9) et on a une retenue de 1 :

si N+1 reste sur kp chiffres x+y est encore de période s : x+y=.....(s)[N+1]M, avec M les kp derniers chiffres de N+y.
Exemple : x=.....(932), y=77 : x+y=.....(932)933009
si N+1 occupe kp+1 chiffres, c'est que N est constitué que de 9, donc s=9 : donc soit y=0 et x+y=x périodique, soit y≥1 et alors, puisque x=-1 (car x est constitué que de 9), x+y=y-1 est entier naturel, donc périodique.

Donc x+y est bien toujours périodique.

3ième cas : x et y entiers décadiques périodiques quelconques :

x=.....(s)d, y=.....(s')d' avec d sur k chiffres et d' sur k'chiffres et par exemple on supposera k≥k'.
On peut alors écrire x=10^kx'+d et y=10^ky'+d'', d'' étant constitué des k derniers chiffres de y
x' est évidemment périodique de période s (x'=.....(s)) ; par contre y', c'est en fait y privé de ses k derniers chiffres, donc encore de période s'' (correspondant aux derniers chiffres de y') : en effet le dernier chiffre de y' va correspondre (évidemment) à un chiffre quelconque de s', par exemple le m ième chiffre de s' (en partant de la gauche de s') et s'' est alors constitué, d'abord, des derniers chiffres de s' (du m+1 ième au dernier), puis des m premiers chiffres de s'' (si ce m ième chiffre de s' est son dernier chiffre, alors s''=s').
Exemple : x=....(685)734589 et y=......(14262)323 : k=6, k'=3, m=2 y'=....(14262)14=.....(26214).
Donc x'+y' est périodique d'après le cas 1, puis 10^k(x'+y') est périodique d'après P3.3, et enfin x+y=10^k(x'+y')+d+d'' l'est aussi d'après le cas 2.

4ième cas : x et y nombres décadiques périodiques.
Il existe p, entier naturel, tel que $10^p x$ et $10^p y$ soient entiers décadiques, et encore périodiques (P3.3) : donc, voir cas 3, $10^p x+10^p y$ est périodique, et en multipliant par 10^{-p} et en réutilisant P3.3 on obtient que x+y est périodique.

Exercice 4
Soit x un nombre décadique périodique : x=.....(s)D,F où s est la période sur p chiffres, D est l'entier naturel constitué des k chiffres de x situés entre la dernière période et la virgule, et F est l'entier naturel constitué des r chiffres situés après la virgule.
Donc $x=.....(s)\times10^k+d$ avec d=D,F.
Cf P3.2 on a $x=-s\times10^k/(10^p-1)+d=(-s\times10^k+d\times(10^p-1))/(10^p-1)$. En multipliant numérateur et dénominateur par 10^r, alors, puisque $d10^r$ est un entier naturel (c'est la juxtaposition de D et F), le numérateur est une différence de deux entiers naturels.
Mais la différence de deux entiers naturels (cas particuliers d'entiers décadiques) est soit un entier naturel, soit l'opposé d'un entier naturel et on a bien $x=e\times a\times(10^p-1)^{-1}\times10^{-r}$, avec a entier naturel et e=-1 ou 1 et , rappelons le, $p\geq1$ et $r\geq0$.

Remarque 1 : si x est un décimal positif, alors la période est s=0, p=1 et en fait $x=(x\times10^r\times(10^1-1))(10^1-1)^{-1}10^{-r}$, cad e=1, $a=x\times10^r\times(10^1-1)$, qui est bien un entier naturel.

Remarque 2 : **on peut démontrer tout de suite la réciproque**, mais en fait vu P3.7, cette réciproque ne présente pas d'intérêt.
Si x s'écrit comme ci-dessus, il est bien périodique car

> $(10^p-1)^{-1}$ l'est, d'après P3.1,
> donc $a(10^p-1)^{-1}$ est périodique, car c'est une somme d'entiers naturels puisque a est entier naturel, et on utilise P3.4,
> donc $a(10^p-1)^{-1}10^{-r}$ est périodique d'après P3.3
> donc si e=1, x est périodique, mais si e=-1 c'est encore vrai d'après P3.4.

Exercice 5
1ère méthode : d'après P3.2, 12/99=.....(12) et 835/999=.....(835), et (c'est en fait le 1er cas de l'exercice 3 sur la preuve de P3.4), on a 12/99+865/999=.....(957047), soit 957047/999999 (cf P3.2).

2ième méthode : on peut vérifier sans peine (surtout avec une calculatrice) que dans N on a $999999\times(999\times12+99\times835)=99\times999\times957047$, mais prouvons le d'une façon qui montre d'où vient cette relation.
On va utiliser la formule bien connue, dans R, sur la série géométrique : pour $|x|<1$ on a $1/(1-x)=1+x+x^2+x^3+...$
On en déduit $12/99=0{,}12/(1-10^{-2})=0{,}12\Sigma_{n\geq0}(10^{-2})^n$; de même, $835/999=0{,}835\Sigma_{n\geq0}(10^{-3})^n$
En faisant des groupements de 3 termes conécutifs on trouve $12/99=0{,}12(e+e10^{-6}+e10^{-12}+e10^{-18}+...)$,
avec $e=1+10^{-2}+10^{-4}$, ce qui donne $12/99=0{,}12\times e(1+10^{-6}+(10^{-6})^2+(10^{-6})^3...)$, soit $12/99=0{,}121212\times1/(1-10^{-6})$.
De même, en faisant cette fois des groupements de 2 termes consécutifs, on trouve $835/999=0{,}835835\times1/(1-10^{-6})$,
Finalement $12/99+895/999=(0{,}121212+0{,}835835)/(1-10^{-6})=0{,}957047/(1-10^{-6})=957047/999999$.
Cette relation dans R, se traduit par l'égalité suivante dans N :
$999999\times(999\times12+99\times835)=99\times999\times957047$.
Mais cette relation dans N, est aussi une relation dans EN(10), donc dans NB(10) ; comme en tant

qu'entiers décadiques 10^6-1, 10^3-1,10^2-1 ont des inverses dans NB(10), voir P3.1, en multipliant les deux côtés de cette relation par le produit des inverses de ces trois nombres on obtient la relation cherchée.
Remarque : on retrouve dans cette 2ième méthode l'idée du 1er cas de la preuve de P3.4, puisque 6 est le ppcm de 3 et 2.

Exercice 6

Si 1/n=0,sssss...=0,(s)....., avec s période sur p chiffres, on a 10^p/n=s,sss.....=s+1/n, d'où ns=10^p-1, et donc n est 1er avec 10 (sinon il existerait d>1 divisant 10 et n, donc divisant 1, ce qui est impossible ; on peut aussi remarquer que 10^p-ns=1 donne une relation de Bezout entre 10 et n).
Réciproquement, supposons n et 10 premiers entre eux.
Il existe donc un entier p tel que n divise 10^p-1 : c'est le théorème d'Euler : p=phi(n). Ainsi il existe aussi un entier naturel s tel que 10^p-1=sn, soit 1/n=s/(10^p-1)=s10^{-p}/(1-10^{-p}) ; et en utilisant le développement en série de 1/(1-x)=1+x+x^2+.... (pour |x|<1) on ontient : 1/n=s10^{-p}+s(10^{-p})^2+....;
mais 10^p-1 a p chiffres, donc s a au plus p chiffres (puisque ns=10^p-1) : quitte à mettre des 0 devant s pour qu'il occupe exactement p chiffres, on peut alors écrire 1/n=0,ssss...=0,(s).....

Exercice 7

L'exercice 6 ci-dessus prouve, le dernier chiffre de n étant 1 ou 3 ou 7 ou 9, que 1/n=0,(s)....., et si s occupe p chiffres on a alors, dans N, ns=10^p-1 (voir toujours exercice 6).
On va maintenant utiliser la même idée que celle de la fin de la 2ième méthode de l'exercice 5 ci-dessus.
Cette égalité étant dans N, elle est aussi dans NB(10). Or dans NB(10), 10^p-1 a un inverse (voir P3.1), donc on peut écrire dans NB(10) :
ns/(10^p-1)=1 et donc n admet un inverse dans NB(10) : c'est 1/n=s/(10^p-1)=-.....(s), d'après P3.2.
D'où, c(s) étant le complémentaire à 9, chiffres à chiffres, de s, on a 1/n=.....(s')+1 (voir P2.2) ;
mais D=s'+1 reste sur p chiffres (sinon s' est constitué que de 9, donc s=0, ce qui est impossible).
Donc 1/n=.....(s')D, entier décadique périodique.

Considérons maintenant le cas où n se termine par 0 ou 2 ou 4 ou 5 ou 6 ou 8.
En utilisant la décomposition en nombres premiers : n=$2^k5^{k'}$n' avec n' ne possédant pas les facteurs premiers 2 et 5, donc n' est 1er avec 10 et donc lui se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9, et donc il admet (cas précédent) un inverse 1/n', entier décadique périodique.
2^k et $5^{k'}$ ont chacun un inverse dans NB(10) : ce sont 2^{-k}et $5^{-k'}$, cela parce que ces nombres (décimaux) sont bien dans NB(10) et leur produit respectif avec 2^k et $5^{k'}$ donne 1 dans D, donc dans NB(10), la multiplication de NB(10) prolongeant celle de D.
Ainsi n a un inverse dans NB(10) : c'est 1/n=(1/n')(1/2^k)(1/$5^{k'}$) ; mais si on considère K=max(k,k') alors il existe un entier naturel u tel que $2^k5^{k'}$u=10^K et donc 1/n=(1/n')(u/10^K)=u×(1/n')×10^{-K}.
1/n' étant périodique, u×(1/n') est aussi périodique, car c'est en fait une somme (u est entier naturel) de nombres périodiques, et on utilise P3.4 ; enfin en utilisant P3.3 on arrive à 1/n périodique.
Cet inverse n'est pas un entier décadique, car c'est un entier décadique (u×(1/n')) multiplié par 10^{-K}, avec K>0 (K=0 exige k=k'=0, donc n 1er avec 10, ce qui est contraire à l'hypothèse).
Si l'inverse de n dans NB(10) a les mêmes chiffres que l'inverse de n dans R, alors, 1/n (dans R) a un nombre fini de chiffres après la virgule, cas de l'inverse de n dans NB(10), et donc n doit être inversible dans D, soit, d'après l'exercice 7 du chapitre 2, n=$2^k5^{k'}$ avec k et k' entiers naturels.
Réciproquement, si n s'écrit ainsi son inverse dans NB(10) est le même que celui dans D (voir ci-dessus).

Exercice 8

Si x est un nombre décadique périodique alors (voir P3.5) x= e×a×(10^p-1)$^{-1}$×10^{-r}, avec a,p,r entiers

naturels, p non nul, et e=-1 ou 1 : c'est un bien un rationnel.
Réciproquement si x=p/q avec p dans Z et q dans N^*, comme 1/q est périodique (P3.6), |p|/q va l'être aussi en tant que somme de nombres périodiques ; si p>0 alors x est périodique, mais si p<0 c'est encore vrai car x=-|p|/q et on utilise P3.3.

<u>Exercice 9</u>
On note x=n×.....(1) et on pose la division :

```
     abc
.....(1)
--------
     abc
    abc
   abc
  abc


--------
....wvuc
```

u est le dernier chiffre de b+c, v le dernier chiffre de la 1ière somme a+b+c (laquelle peut être augmentée éventuellement d'une retenue provenant de b+c), w le dernier chiffre de la 2ième somme a+b+c (laquelle peut être augmentée éventuellement d'une retenue provenant de la somme prédente), d'où plusieurs cas à envisager.

Notons s=b+c, d son dernier chiffre, s'=a+b+c, d' son dernier chiffre et d'' le dernier chiffre de s'+1
si b+c≤9, alors les deux derniers chiffres de x sont s et c, et

> **si a+b+c≤9 alors**
> > **x=.....(s')sc**
> > **Exemple** : 213×....(1)=.....(6)43
>
> **si a+b+c≥10** : forcément a+b+c≤18 (puisque b+c≤9).
> La première somme a+b+c va provoquer une retenue de 1 sur la somme a+b+c suivante, laquelle va devenir ≥11, mais sera ≤19, et donc on aura toujours une retenue de 1. On notera qu'ici d''=d'+1, car d'=9 est impossible (d'=9 entraîne a+b+c=9 ou 19, ce qui est impossible puisqu'ici a+b+c≤18 et a+b+c≥10), donc
>
> > **x=.....(d'+1)d'sc**
> > **Exemple** : 713×.....(1)=.....(2)143.

Si 10≤b+c, évidemment on a b+c≤18, et b+c va provoquer une retenue de 1 sur la 1ière somme a+b+c≥10.

> **si a+b+c+1≤19**, alors la 1ère somme a+b+c+1 va provoquer une retenue de 1 sur la somme a+b+c suivante et la somme a+b+c+1 suivante va encore provoquer une retenue de 1 sur la somme a+b+c suivante : etc. Mais là aussi, on a encore d''=d'+1, car d'=9 est impossible (d'=9 entraîne a+b+c=9 ou 19, or ici b+c≥10, donc la seule possibilité est a+b+c=19 qui est impossible car a+b+c+1≤19), donc
> > **x=.....(d'+1)dc**
> > **Exemples** : 257×.....(1)=.....(5)27 et 657×.....(1)=.....(9)27
>
> **si 20≤a+b+c+1**, on a évidemment a+b+c+2≤29 ; la 1ière somme a+b+c+1 va cette fois provoquer une retenue de 2 sur la somme a+b+c suivante, laquelle somme a+b+c+2 va

provoquer encore une retenue de 2 sur la somme a+b+c suivante : etc. Et en remarquant que le dernier chiffre de a+b+c+2 est en fait d''+1, car d''=9 est impossible (d''=9 entraîne a+b+c+1=9 ou 19, ce qui est impossible car on est dans le cas a+b+c+1≥20), donc

x=.....(d''+1)d''dc

Exemples : 857×.....(1)=.....(2)127 et 757×.....(1)=.....(1)027 : cet exemple qui montre que d'' n'est pas forcément d'+1, puisqu'ici d''=0 et d'+1=10 ; et aussi 999×.....(1)=.....(9)889 qui est aussi égal à la différence .....(1)000-.....(1).

Remarque : pour vérifier rapidement les exemples, on peut prendre une calculatrice et multiplier n par un entier dont tous les chiffres (une dizaine par exemple) sont tous égaux à 1, et observer les premiers chiffres du résultat obtenu ; ne pas oublier que pour deux entiers décadiques x et y on a (voir D1.3) $[x]_n[y]_n \equiv [xy]_n$ (10^{n+1}).
Par exemple (voir cas 20≤a+b+c+1) 757×1111111111=841111111027.

retour plan de cette page

4-Sur l'inversibilité des nombres décadiques

La notion d'inversibilité dans NB(10) a été définie à la remarque de P2.5 et, on a déjà vu trois cas particuliers :

les entiers décadiques de la forme 10^p-1 (voir P3.1)
les entiers relatifs : voir P3.6
et plus généralement, les nombres décadiques périodiques : voir P3.9

On verra au chapitre 7 un résultat sur l'inverse de 1-x lorsque x est un entier décadique se terminant par zéro (série géométrique).

P4.1-> **Si un entier décadique (ou brenom entier) x se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9, alors**

1) il est inversible, son inverse 1/x étant un entier décadique.
2) pour tout d entier décadique, l'équation d=qx, d'inconnue q dans NB(10), a une seule solution, laquelle est un entier décadique : q=d×(1/x)=d/x
3) l'unique solution de l'équation d=qx ci-dessus peut être obtenue (du moins ses derniers chiffres) en posant la division ; mais au lieu de chercher d'abord le premier chiffre du quotient q, on cherche son dernier q_0, puis l'avant-dernier q_1, etc....

```
d                |x
                  ________________________
d-q₀x=10D₁      | .........q₃q₂q₁q₀
D₁-q₁x=10D₂     |
D₂-q₂x=10D₃     |
```

x_0 étant le dernier chiffre de x :
q_0 est l'unique entier dans {0;1;2;...;9} tel que q_0x_0 ait pour dernier chiffre celui de d.
q_1 est l'unique entier dans {0;1;2;...;9} tel que q_1x_0 ait pour dernier chiffre celui de D_1.
q_2 est l'unique entier dans {0;1;2;...;9} tel que q_2x_0 ait pour dernier chiffre celui de D_2.
q_3 est l'unique entier dans {0;1;2;...;9} tel que q_3x_0 ait pour dernier chiffre celui de D_3.
etc

Exemple 1 :
d=1, x=11 : on trouve successivement
$q_0=1$, $d-q_0x=1-11=-10=.....(9)0$, $D_1=.....(9)$
$q_1=9$, $D_1-q_1x=D_1-99=.....(9)00$, $D_2=.....(9)0$
$q_2=0$, $D_2-q_2x=D_2-0=.....(9)0$, $D_3=.....(9)=D_1$
donc les q_i sont périodiques : 1/11=.....(09)1.
Vérifions : 11×(1/11)=10×(.....(09)1)+(.....(09)1)=(.....(09)10)+(.....(09)1)=1

On peut disposer ainsi (le ϕ désigne le zéro barré : il correspond à la division par 10 de D_i-q_ix pour obtenir D_{i+1}) :

```
             1|11
.........(9)ϕ|.........091
.......(9)0ϕ |
......(9)ϕ   | là on retrouve la 2ième ligne, d'où la période 09
```

Exemple 2 :
d=1, x=3 : on trouve successivement
$q_0=7$, $d-q_0x=1-21=-20=.....(9)80$, $D_1=.....(9)8$
$q_1=6$, $D_1-q_1x=D_1-18=.....(9)80$, $D_2=.....(9)8=D_1$
donc 1/3=.....(6)7 ; vérification faite lors de l'exercice 3 du chapitre1.

Exemple 3 :
d=1, x=99 : on trouve successivement
$q_0=9$, $d-q_0x=1-891=-890=.....(9)110$, $D_1=.....(9)11$
$q_1=9$, $D_1-q_1x=D_1-891=.....(9)020$, $D_2=.....(9)02$
$q_2=8$, $D_2-q_2x=D_2-792=.....(9)110$, $D_3=D_1$
donc 1/99=.....(89)9 : voir P3.1 où déjà été obtenu.

Exemple 4 :
recherche de l'inverse de 7 (voir exemple 1 pour la signification de ϕ)

```
               1|7
..........(9)8ϕ|.....42857143
.........(9)7ϕ |
.........(9)ϕ  |
......(9)5ϕ    |
.....(9)6ϕ     |
....(9)4ϕ      |
...(9)8ϕ       | là on retrouve la 2ème ligne, d'où la période 285714
..(9)7ϕ
```

donc 1/7=.....(285714)3 ; voir exemple de P3.6 où ce développement déjà été obtenu.

Exercice 1 : prouver P4.1.
Indication : on commencera par prouver le 2) en démontrant d'abord que si $x_0=1$ ou 3 ou 7 ou 9 alors pour tout entier relatif n il existe un unique entier naturel b dans {0;1;2;...;9} tel que $bx_0\equiv n$ (10), cette égalité modulo n étant équivalente à bx_0 et n ont le même dernier chiffre, puisque la différence de ces deux nombres est un multiple de 10 ; bien sûr, lorsque n<0, il s'agit du dernier chiffre de son écriture décimale habituelle dans Z, et non de son dernier chiffre lorsqu'il est écrit sous forme de nombre décadique (par exemple si n=-12 son dernier chiffre ici est 2, alors qu'en tant que nombre décadique -12=.....(9)88, dont le dernier chiffre est 8).

P4.2-> **Si un entier décadique, non nul, se termine par 0 ou 2 ou 4 ou 5 ou 6 ou 8 alors**

il peut ne pas avoir d'inverse dans NB(10) (cas des diviseurs de 0 : voir exercice 5 du chapitre 2 et voir chapitre 5)
s'il admet un inverse , cet inverse ne peut être dans EN(10) ; cela a été prouvé à l'exercice 6 du chapitre 1.
s'il se termine par 0 et que son dernier chiffre non nul est 1 ou 3 ou 7 ou 9, il admet un inverse, non entier décadique

Exercice 2 : prouver P4.2.

P4.3-> **Un entier décadique est inversible dans EN(10) ⇔ son dernier chiffre est 1 ou 3 ou 7 ou 9**
C'est une conséquence immédiate de P4.1 et P4.2.

P4.4-> **Soit x un entier décadique non nul :**
x est inversible dans NB(10)⇔ il existe deux entiers naturels n et m tels que $y=x/(2^n5^m)=(0,2)^m(0,5)^nx$ soit un entier décadique se terminant par 1 ou 3 ou 7 ou 9.

Rappel : 2^n et 5^m étant des entiers naturels, ils sont inversibles dans NB(10) : voir P3.6.
Remarque : Cette propriété n'a vraiment d'intérêt que pour les entiers décadiques se terminant par 0,2,4,5,6,8, car pour ceux se terminant par 1,3,7,9 elle est évidemment toujours vérifiée (m=n=0), et heureusement, vu P4.1

On retrouve aussi P3.6, car si x est un entier naturel non nul, sa décomposition en nombres premiers prouve l'existence de m et n (voir la preuve de P3.6).

On retrouve aussi que x=.....(s) est inversible (car périodique et on utilise P3.9), même si s ne se termine pas par 1 ou 3 ou 7 ou 9, car la décomposition en nombres premiers de s donne $s=2^n5^ms'$ avec s' se terminant par 1 ou 3 ou 5 ou 7 ; donc $x=2^n5^m\times$(.....(s')), car en fait on a une addition de 2^n5^m fois .....(s'), donc on ajoute chiffres à chiffres et comme $2^n5^ms'=s$, il n'y a pas de retenue.
Donc x est inversible car c'est un produit d'inversibles : 2^n, 5^m, d'après P3.6, et .....(s'), d'après P4.1.

Exercice 3 : prouver P4.4.
La solution de cet exercice donne une méthode pour trouver n et m, lorsque x est inversible.

P4.5-> **La recherche de l'inverse d'un nombre décadique (ou brenom) se ramène à la recherche de l'inverse d'un entier décadique.**
En effet si x a r chiffres après la virgule (r≥1) , alors $y=10^rx$ est entier décadique et y inversible dans NB(10)⇔ x est inversible dans NB(10).
Cette équivalence résulte du fait que 10^r est inversible, dans NB(10), d'inverse 10^{-r}.

Solution des exercices du chapitre 4

Exercice 1
Prouvons d'abord la propriété, notée (P) :

si x_0=1 ou 3 ou 7 ou 9, alors pour tout entier relatif n, il existe un unique entier naturel b dans {0;1;2;...;9} tel que $bx_0\equiv n$ (10), cette égalité modulo n étant équivalente à bx_0 et n ont le même dernier chiffre, puisque la différence de ces deux nombres est un multiple de 10 ;

bien sûr, lorsque n<0, il s'agit du dernier chiffre de son écriture décimale habituelle dans Z, et non de son dernier chiffre lorsqu'il est écrit sous forme de nombre décadique.

x_0 et 10 étant 1er entre eux, il existe u et v dans Z tel que $ux_0+v\times10=1$, soit $ux_0\equiv1$ (10).
Donc $nux_0\equiv n$ (10) ; en prenant alors pour b le reste de la division de nu par 10 on a alors b dans {0;1;2;...;9} et $nu\equiv b$ (10) et en multipliant des deux côtés par x_0 on obtient $bx_0\equiv n$ (10).
Ce chiffre b est unique car si b' est dans {0;1;2;...;9} avec $b'x\equiv n$ (10), alors $bx_0\equiv b'x_0$ (10), donc 10 divise $(b-b')x_0$ et comme 10 est 1er avec x_0, 10 divise b-b', donc b=b', puisque $|b-b'|\leq9$.

Commencons par montrer le 2) de P4.1 : il existe un seul nombre décadique q tel que d=qx, et on en déduira le 1).

Tout d'abord q est nécessairement entier décadique
En effet si x a r chiffres après la virgule (avec r>0) et si q_{-r} est son dernier chiffre (il est non nul), alors $(10^rq)x$ est un entier décadique dont le dernier chiffre est celui de $c=q_{-r}x_0$; pour que 10 divise c, puisque 10 est 1er avec x_0, il faudrait que 10 divise q_{-r}, ce qui est impossible : donc 10 ne divise pas c et donc c ne se termine pas par 0.
Finalement $(10^rq)x$ est un entier décadique dont le dernier chiffre est non nul, donc qx est un nombre décadique avec r chiffres après la virgule : donc qx ne peut être égal à d (entier décadique).

Montrons qu'il existe effectivement un et un seul entier décadique tel que d=qx.
$d=qx\Leftrightarrow$pour tout entier naturel n, $[d]_n=[qx]_n$, soit $[d]_n\equiv[qx]_n$ (10^{n+1}), cf D1.1,
$\Leftrightarrow$ pour tout entier naturel n, $[d]_n\equiv[q]_n[x]_n$ (10^{n+1}), cf D1.3 ; cette congruence sera notée R_n.
On va montrer par récurrence qu'il existe un seul entier décadique q (q_n étant son chiffre de rang n), vérifiant pour tout entier naturel n, la relation R_n.
R_0 est vérifiée ssi $d_0\equiv q_0x_0$ (10), ce qui donne une et une seule possibilité pour q_0, cf la propriété (P).
Supposons qu'il existe q_0, q_1, ..., q_n uniques tels que R_0, R_1,..., R_n soient vérifées :
R_{n+1} sera vérifée $\Leftrightarrow$ $10^{n+1}d_{n+1}+[d]_n\equiv$ $(10^{n+1}q_{n+1}+[q]_n)(10^{n+1}x_{n+1}+[x]_n)$ (10^{n+2})
$\Leftrightarrow$ $10^{n+1}d_{n+1}+[d]_n\equiv$ $10^{n+1}(q_{n+1}[x]_n+x_{n+1}[q]_n)+[q]_n[x]_n)$ (10^{n+2})
Mais par hypothèse de récurrence, R_n est vraie donc 10^{n+1} divise $[d]_n-[q]_n[x]_n$ et
R_{n+1} sera vérifiée $\Leftrightarrow$ $q_{n+1}[x]_n\equiv([d]_n-[q]_n[x]_n)/10^{n+1}+d_{n+1}-x_{n+1}[q]_n=([d]_{n+1}-[x]_{n+1}[q]_n)/10^{n+1}$ (10)
et comme $[x]_n\equiv x_0$ (10), finalement
R_{n+1} sera vérifiée $\Leftrightarrow q_{n+1}x_0\equiv([d]_{n+1}-[x]_{n+1}[q]_n)/10^{n+1}$ (10)
Cf la propriété (P) il existe un seul q_{n+1} dans {0;1;...;9} vérifiant cette relation, donc vérifiant R_{n+1}.
On vient donc de prouver par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe un et un seul entier q_n dans {0;1;...;9} tel que R_n soit vérifiée, q étant l'entier décadique dont le chiffre de rang n est q_n.
Ce qui prouve l'existence d'un seul entier décadique q tel que d=qx.
Et donc l'équation d=qx a une seule solution q dans NB(10) : elle est en fait dans EN(10).

On en déduit la preuve du 1) de P4.1 :
evidemment en prenant d=1, on en déduit tout de suite qu'il existe un seul nombre décadique q (qui est en fait un entier décadique) tel que 1=qx : x est donc inversible, d'inverse 1/x=q qui est entier décadique.

On finit la preuve du 2) de P4.1 :
on peut alors expliciter la seule solution de l'équation d=qx : c'est q=d×(1/x), qui est bien entière décadique, puisque produit de deux entiers décadiques.

Venons en maintenant à la preuve du 3) de P4.1: la division.
Les d_i et D_i étant ceux définis dans l'énoncé de P4.1 (en rajoutant $D_0=d$), on peut effectivement écrire D_n-q_nx sous la forme 10 fois un entier décadique (D_{n+1}) car D_n et q_nx ont même dernier chiffre (par choix de q_n, puisque q_nx_0 et q_nx ont même dernier chiffre) et cf P2.4, D_n-q_nx se termine par 0.
On a les résultats suivants :

pour tout n≥0, $q_nx_0\equiv[D_n]_0$ (10) ; si n=0 cela donne $q_0x_0\equiv[d]_0=d_0$ (10).

En effet $[D_n]_0=[q_nx_0]_0$ (car par définition de q_n, D_n et q_nx_0 ont même denier chiffre) et $q_nx_0\equiv[q_nx_0]_0$ (10) (puisque le membre de droite est le dernier chiffre du membre de gauche).

et

pour tout n≥1, $10^nD_n=d-[q]_{n-1}x$

Une récurrence facile le prouve :
vrai si n=1, car $[q]_0=q_0$; et si c'est vrai pour n≥1,
de $10D_{n+1}=D_n-q_nx$, on tire $10^{n+1}D_{n+1}=d-[q]_{n-1}x-10^nq_nx=d-[q]_nx$, et donc c'est vrai pour n+1. Ces q_n obtenus lors de cette "division" définissent un entier décadique q (son chiffre de rang n est q_n) : il s'agit de montrer que cet entier décadique q vérifie d=qx, donc (cf la démonstration du 2)) que

$q_0x_0\equiv d_0$ (10), ce qui est bien vrai (voir plus haut), et
pour tout n≥0, $q_{n+1}x_0\equiv([d]_{n+1}-[x]_{n+1}[q]_n)/10^{n+1}$ (10)

Cf plus haut on a $q_{n+1}x_0\equiv[D_{n+1}]_0$ (10).
On peut écrire $[D_{n+1}]_0=[10^{n+1}D_{n+1}]_{n+1}/10^{n+1}=[d-[q]_nx]_{n+1}/10^{n+1}$ (c'est bien un entier naturel : le dernier chiffre de D_{n+1}!)
Mais $[d-[q]_nx]_{n+1}\equiv[d]_{n+1}-[[q]_n]_{n+1}[x]_{n+1}=[d]_{n+1}-[q]_n[x]_{n+1}$ (10^{n+2}) ;
or le membre de gauche de cette égalité est divisible par 10^{n+1}, donc le membre de droite aussi, d'où
$[d-[q]_nx]_{n+1}/10^{n+1}\equiv([d]_{n+1}-[q]_n[x]_{n+1})/10^{n+1}$ (10), soit
$q_{n+1}x_0\equiv([d]_{n+1}-[q]_n[x]_{n+1})/10^{n+1}$ (10) : c'est bien ce qu'il fallait prouver.

Exercice 2 :
Il s'agit de montrer que si un entier décadique x se termine par 0 et que son dernier chiffre non nul est 1 ou 3 ou 7 ou 9, alors il est inversible.
On a alors $x=x'10^n$, avec n entier naturel≥1 et x' entier décadique se terminant par 1 ou 3 ou 7 ou 9 : donc x est un produit d'inversibles (pour x' voir P4.1, pour 10^n voir P3.6) donc inversible.
Précisons : $1/x=(1/x')10^{-n}$, et comme 1/x' est entier décadique (voir P4.1) ne se terminant pas par 0 (sinon x'×(1/x') ne se terminerait pas par 1), 1/x n'est pas entier décadique. Par exemple 1/70=.....(285714),3.
Exercice 3
Soit x un entier décadique se terminant par 2 ou 4 ou 5 ou 6 ou 8.

S'il existe deux entiers naturels n et m tels que $y=x/(2^n5^m)$ soit un entier décadique se terminant par 1 ou 3 ou 7 ou 9, alors x est le produit de trois nombres inversibles y, 2^n, 5^m, et donc x est inversible.

Réciproque : on suppose x inversible ; donc cet inverse n'est pas (voir P4.2) dans EN(10), cad 1/x posséde des chiffres après la virgule : $1/x=......,y_{-1}...y_{-r}$, avec $r\geq 1$.
Puisque x et $10^r(1/x)$ sont des entiers décadiques dont le produit est 10^r, donc qui se termine par 0, c'est que le produit de leurs derniers chiffres x_0 et y_{-r} se termine par 0 (puisque $[x(10^r(1/x))]_0\equiv[x]_0\,[10^r(1/x)]_0\ (10)$).

si x_0 est 2 ou 4 ou 6 ou 8, alors obligatoirement $y_{-r}=5$; on pose $a_1=5/10=1/2$ et $1/a_1=2$
si $x_0=5$, alors obligatoirement $y_{-r}=2$ ou 4 ou 6 ou 8 ; on pose $a_1=2/10=1/5$ et $1/a_1=5$
si $x_0=0$, y_{-r} est à priori quelconque ; on pose $a_1=1/10$et $1/a_1=10$

Dans les trois cas xa_1 reste un entier décadique

dans le 1er cas, $x\times 5$ se termine par 0, donc $x\times 5=10\times$un entier décadique
dans le 2ième cas, $x\times 2$ se termine par 0, donc $x\times 2=10\times$un entier décadique
dans le 3ième cas, $x\times 1$ se termine par 0, donc $x\times 1=10\times$un entier décadique

et dans les trois cas $y_{-r}(1/a_1)$ se termine par 0 : donc $10^r(1/x)(1/a_1)$ est un entier décadique se terminant par 0 ;
Donc $(1/x)(1/a_1)$ est un nombre décadique avec au plus r-1 chiffres après la virgule.
Comme $xa_1((1/x)(1/a_1))=1$, c'est que l'entier décadique xa_1 a un inverse avec au plus r-1 chiffres après la virgule : on peut alors appliquer à xa_1 le même raisonnement que pour x ; etc
Il existe donc a_1, a_2,...,a_k avec $k\leq r$ et $a_i=1/2$ ou 1/5 ou 1/10 tels que $y=(((xa_1)a_2)...a_k)=xa_1a_2...a_k$ soit inversible dans EN(10), donc y se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9, et vu la forme des a_i, leur produit est de la forme $1/(2^n5^m)$.
La réciproque est bien prouvée.

Remarque : **cette preuve donne une méthode pour trouver m et n si x est inversible**.

retour plan de cette page

5-Diviseurs de 0.

On a vu lors de l'exercice 5 du chapitre 2 la définition de diviseur de 0 : **$x\in$NB(10) est diviseur de 0 signifie que x est non nul et qu'il existe $y\in$NB(10) non nul avec xy=0** ; donc y est aussi diviseur de 0 et on peut dire que **x et y sont deux diviseurs de 0 associés**.

En particulier, x entier décadique non nul est diviseur de 0 $\Leftrightarrow$ il existe un nombre décadique y non nul tel que xy=0 ; mais pour tout nombre décadique y, il existe un entier naturel r tel que $y'=10^ry$ soit entier décadique et si xy=0, on a encore xy'=0. On a donc :
si $x\in$EN(10), alors x diviseur de 0$\Leftrightarrow$ x est non nul et il existe y non nul dans EN(10) tel que xy=0.

Lors de cet exercice on a aussi vu que **tout diviseur de 0 n'est pas inversible**. **En fait, on verra au chapitre 8 (P8.9) que la réciproque est vraie, cad :**

x non inversible⇔x=0 ou x est diviseur de 0

ce qui équivaut à dire :

x est inversible⇔x≠0 et x n'est pas diviseur de 0

Remarque 1 :
ce résultat est vrai pour tout anneau (pas forcément commutatif) unitaire **fini** ; par exemple dans l'anneau Z/24Z des entiers modulo 24 : 18 n'est pas inversible (car 18 n'est pas 1er avec 24) et 18 est bien un diviseur de 0 puisque $18\times4\equiv0$ (24).
Voici un autre exemple, que NB(10), d'anneau non fini où ce résultat est vrai : l'anneau des matrices carrées n×n à éléments dans un corps commutatif.
En effet si M est une matrice carrée n×n non nulle et non inversible, alors M non inversible entraîne qu'il existe une matrice colonne (n×1) X telle que MX=0 et donc, si N est la matrice carrée n×n dont les n colonnes sont toutes égales à X, on a MN=0 avec N non nulle, et M est bien un diviseur de 0.

Remarque 2 :
attention : ce résultat n'est plus vrai pour l'anneau EN(10) : 70 n'a pas d'inverse dans EN (10), voir P4.2, pourtant ce n'est pas un diviseur de 0, puisqu'il est inversible ... dans NB(10).

Remarque 3 :
Tout nombre décadique périodique (en particulier tout entier relatif) n'est pas diviseur de 0 : s'il est nul, c'est trivial, s'il n'est pas nul, il est inversible, (voir P3.6, P3.9) et donc il n'est pas diviseur de 0 d'après la propriété ci-dessus.

P5.1->**Notons aussi que si x est un diviseur de 0, alors pour tout z inversible , zx est aussi diviseur de 0**.
En effet, si xy=0 avec x et y non nuls, (zx)y=0 et zx reste non nul, car zx=0 donne x=0 en multipliant par l'inverse de z.

Remarque :
ce résultat peut être faux si z n'est pas inversible, par exemple si x est diviseur de 0 associé à y, auquel cas xy=0 et en prenant z=y, on zx=0 qui n'est pas diviseur de 0.

P5.2->
1) Soient x et y deux entiers décadiques (ou brenoms entiers) non nuls :

xy=0 (cad x et y sont deux diviseurs de 0 associés)

⇔

$(\forall n\in N, 2^{n+1}$ divise $[x]_n$ et 5^{n+1} divise $[y]_n)$ ou $(\forall n\in N, 5^{n+1}$ divise $[x]_n$ et 2^{n+1} divise $[y]_n)$

Remarque 1 :
le ou est exclusif.

Remarque 2 :
un entier décadique x diviseur de 0 se temine par 5 ou par un nombre pair, puisque soit 2 divise x_0, soit 5 divise x_0.

s'il se termine par un chiffre pair non nul, alors pour tout n dans N, 2^{n+1} divise $[x]_n$
s'il se termine par 5, alors pour tout n dans N, 5^{n+1} divise $[x]_n$

2) Soit x un entier décadique et n un entier naturel quelconque :

2^{n+1} divise $[x]_n \Leftrightarrow 2^{n+1}$ divise x
5^{n+1} divise $[x]_n \Leftrightarrow 5^{n+1}$ divise x

Remarque 3 : lorsque je dis qu'un entier relatif divise un autre entier relatif, il s'agit bien sûr de la division habituelle dans Z (donc quotient dans Z) ; par contre lorsque je dis qu'un entier relatif n divise un entier décadique d, cela sous-entend toujours la division dans EN(10), c'est-à-dire qu'à priori le quotient est entier décadique (qui sera entier relatif ssi $d \in Z$ et si n divise d ... dans Z).

3) x étant un entier décadique non nul
x est diviseur de 0 $\Leftrightarrow$ ($\forall n \in N$, 2^{n+1} divise x) ou ($\forall n \in N$, 5^{n+1} divise x).

Remarque 4 :
voir des compléments sur les diviseurs de 0 à P8.9.

Exercice 1 : prouver P5.2

P5.3->**Soit x un nombre décadique :**
1) x diviseur de 0 $\Leftrightarrow x^2$ diviseur de 0
2) si x_0 est une racine carrée de x alors x diviseur de 0 $\Leftrightarrow x_0$ diviseur de 0.

Exercice 2 : prouver P5.3

Je vais donner ici deux méthodes permettant de trouver des entiers décadiques diviseurs de 0.

1ière méthode : à l'aide des puissances de 2 et de 5, proposée sous forme d'exercice :

Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n non nul

> on note I_n= l'inverse de 5 modulo 2^n, cad $5I_n \equiv 1$ (2^n) avec I_n dans $\{0;1;...;2^n-1\}$,
> (l'existence de I_n provient du fait que 5 et 2^n sont 1er entre eux).
> Et on pose $A_n=5^n I_n \times I_{n-1} \times ... \times I_1$.
>
> on note J_n= l'inverse de 2 modulo 5^n, cad $2J_n \equiv 1$ (5^n) avec J_n dans $\{0;1;...;5^n-1\}$,
> (l'existence de J_n provient du fait que 2 et 5^n sont 1er entre eux).
> En fait $J_n=(1+5^n)/2$ car $2J_n-1=5^n \equiv 0$ (5^n) et $J_n \leq 5^n-1$, puisque n est non nul.
> Et on pose $B_n=2^n J_n \times J_{n-1} \times ... \times J_1$.

1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, A_{n+1} et A_n ont les mêmes n derniers chiffres, et de même B_{n+1} et B_n ont les mêmes n derniers chiffres.
Déterminer A_n et B_n pour n=1,2,3,4.
2) Justifier l'existence de deux entiers décadiques x et y, tels que pour tout entier naturel n, on ait $[x]_n=[A_{n+1}]_n$ et $[y]_n=[B_{n+1}]_n$.
Donner les 5 derniers chiffres de x et y.
3) Montrer que pour tout $n \in N$, 5^{n+1} divise $[x]_n$ et 2^{n+1} divise $[y]_{n+1}$. Conclure.

2ième méthode : de proche en proche , proposée sous forme d'exercice :

Exercice 4 :
Soient x et y deux entiers décadiques, dont les chiffres de rang $n\geq 0$ respectifs sont notés x_n et y_n, avec $x_0=2$, $y_0=5$.
1) Montrer, par récurrence, qu'on peut déterminer x et y de sorte que pour tout entier naturel n, les chiffres de rang $\leq n$ de $[x]_n[y]_n$ soient tous nuls.
2) Montrer qu'alors xy=0.
3) Déterminer un tel couple (x,y), du moins donner les 7 derniers chiffres de x et y.
4) Vérifier que chercher x et y tels que xy=0 en posant la multiplication de x par y, revient à la question 1.

Solution des exercices du chapitre 5

Exercice 1 : preuve de P5.2
preuve du 1)
Supposons, par exemple que 2^{n+1} divise $[x]_n$ et 5^{n+1} divise $[y]_n$ pour tout $n\in N$.
2^{n+1} et 5^{n+1} étant 1er entre eux, 10^{n+1} divise $[x]_n[y]_n$, donc $[x]_n[y]_n\equiv 0\ (10^{n+1})$.
Mais cf D1.3, $[xy]_n\equiv[x]_n[y]_n\ (10^{n+1})$, donc $[xy]_n\equiv 0\ (10^{n+1})$ et $[xy]_n=0$ (puisque c'est un entier dans $\{0;1;...;10^{n+1}-1\}$) : les chiffres de rang $\leq n$ de xy sont nuls, cela pour tout $n\in N$, donc xy=0

On suppose maintenant que xy=0 avec x et y non nuls.
Donc pour tout $n\in n$ on a $[xy]_n=0$, soit puisque $[xy]_n\equiv[x]_n[y]_n\ (10^{n+1})$, $[x]_n[y]_n\equiv 0\ (10^{n+1})$, cad 10^{n+1} divise $[x]_n[y]_n$.
En particulier x_0y_0 se terminent par 0.
Si x et y ne se terminent pas par 0, alors l'un (par exemple x) se termine par 5 et l'autre (par exemple y) par un chiffre pair non nul ; donc pour tout $n\in N$, $[x]_n$ sera impair (il se termine par 5) et $[y]_n$ sera pair
Comme 10^{n+1} divise $[x]_n[y]_n$, c'est que 2^{n+1} divise $[x]_n[y]_n$; mais 2^{n+1} est 1er avec $[x]_n$ et donc 2^{n+1} divise $[y]_n$; de façon analogue 5^{n+1} divise $[x]_n$.
Si x ou y a son dernier chiffre nul, alors $x=10^u x'$ et $y=10^v y'$, avec u et v entiers naturels (l'un est non nul), x' et y' entiers décadiques ne se terminant pas par zéro ; comme x'y'=0, c'est que pour tout $n\in N$ on a (par exemple) 2^{n+1} divise $[y']_n$ et 5^{n+1} divise $[x']_n$.
si u=0, x=x' et pour tout $n\in N$ on a 5^{n+1} divise $[x]_n$
si $u\geq 1$ alors

> pour $0\leq n\leq u-1$ on a $[x]_n=0$ et 5^{n+1} divise $[x]_n$
> et pour $u\leq n$, $[x]_n=10^u[x']_{n-u}$ et comme 5^{n-u+1} divise $[x']_{n-u}$ et 5^u divise 10^u on a $5^u\times 5^{n-u+1}=5^{n+1}$ divise $[x]_n$.
> (illustration : si $x=...356000=10^u x'$ avec u=3, x'=...356 on a $[x]_0=[x]_1=[x]_2=0$ et $[x]_3=6000=10^3[x']_{3-3}$)

Donc pour tout $n\in N$ on a 5^{n+1} divise $[x]_{n+1}$.
Un raisonnement analogue montre que pour tout $n\in N$, on a 2^{n+1} divise $[y]_{n+1}$.

Explication du fait que le ou est exclusif :
si on a simultanément (pour tout $n\in N$, 2^{n+1} divise $[x]_n$ et 5^{n+1} divise $[y]_n$) **et** (pour tout $n\in N$, 5^{n+1} divise $[x]_n$ et 2^{n+1} divise $[y]_n$), alors, en particulier, 10^{n+1} divise $[x]_n$, donc $[x]_n=0$, cela pour tout entier naturel n et donc x=0, ce qui est exclu par hypothèse.

preuve du 2)
Si 2^{n+1} divise $[x]_n$, c'est que $[x]_n=q_n2^{n+1}$, avec q_n dans N. Mais $x=Q_n10^{n+1}+[x]_n$, avec Q_n entier décadique, et donc $x=Q'_n2^{n+1}$, avec $Q'_n=Q_n5^{n+1}+q_n$, entier décadique ce qui prouve que 2^{n+1} divise x.

Si 2^{n+1} divise x, c'est que $x=Q'_n2^{n+1}$, avec Q'_n entier décadique.
Donc $[x]_n=[Q'_n2^{n+1}]_n\equiv [Q'_n]_n[2^{n+1}]_n$ (10^{n+1}), d'après D1.3 ; mais $2^{n+1} \leq 10^{n+1}-1=9\times10^n+...+9\times10+9$ et donc 2^{n+1} s'écrit, en écriture décimale, avec au plus n+1 chiffres, d'où $[2^{n+1}]_n=2^{n+1}$. Comme 2^{n+1} divise 10^{n+1}, 2^{n+1} divise $[x]_n$.
Même démonstration pour 5^{n+1}.

<u>attention</u> : par exemple, 3^{n+1} est inversible dans EN(10), cf il se termine par 1 ou 3 ou 7 ou 9 : son inverse est $u=(1/3)^{n+1}$ avec 1/3=.....(6)7 inverse de 3 (voir P4.1). Donc il existe un entier décadique u tel que $1=3^{n+1}u$.
Donc 3^{n+1} divise 1 .... dans EN(10), mais pour autant 3^{n+1} ne divise pas $[1]_n=1$ dans Z.
En fait si on refait le raisonnement précédent, $[1]_n=1\equiv [3^{n+1}]_n[u]_n=3^{n+1}[u]_n$ (10^{n+1}), mais 3^{n+1} ne divisant pas 10^{n+1} (dans Z), on ne peut conclure à 3^{n+1} divise 1 (dans Z), ... heureusement!

preuve du 3)
Le sens gauche-droite est évident cf le 1) et le 2), puisque si x est diviseur de 0, c'est qu'il est associé à un autre diviseur de 0.
Supposons maintenant que x, entier décadique, soit tel que pour tout n dans N, 2^{n+1} divise x : alors cf le 2), 2^{n+1} divise $[x]_n$.
Considèrons maiantenant un diviseur de 0, y, se terminant par 5 (il en existe, voir par exemple l'exercice 2 ci-après) ; cf le 1), pour tout n dans N, 5^{n+1} divise $[y]_n$, et alors, toujours cf le 1) xy=0 et x est bien diviseur de 0 (rappel : x a été supposé non nul).
Démonstration analogue dans le cas où 5^{n+1} divise x pour tout n dans N.

<u>Exercice 2</u>
Rappelons que $x=0 \Leftrightarrow x^2=0$, cf exercice 6 du chapitre 2.
1) Si x est diviseur de 0, alors $x\neq0$ et il existe $z\neq0$ tel que xz=0 ; donc $x^2z=0$ et comme $x^2\neq0$, c'est que x^2 est diviseur de 0.
Réciproquement, si x^2 est diviseur de 0, alors x^2, et donc x, est $\neq0$ et il existe z $\neq0$ tel que $x^2z=x(xz)=0$; donc soit xz=0 et x est diviseur de 0 (associé à z), soit xz $\neq0$ et x est diviseur de 0 (associé à xz).

2) On applique le 1) puisque $x=x_0^2$.

<u>Exercice 3</u>
1) Il s'agit de montrer que 10^n divise $A_{n+1}-A_n$.
De façon évidente 5^n divise A_n et 5^{n+1}, donc 5^n divise A^{n+1} et ainsi 5^n divise $A_{n+1}-A_n$.
$A_{n+1}-A_n=A_n(5I_{n+1}-1)$; or $5I_{n+1}-1$ est divisible par 2^{n+1}, donc 2^{n+1}, en particuler par 2^n, divise aussi $A_{n+1}-A_n$.
2^n et 5^n étant premiers entre eux leur produit divise $A_{n+1}-A_n$, soit 10^n divise $A_{n+1}-A_n$, et donc A_{n+1} et A_n ont les mêmes n derniers chiffres
Par un raisonnement analogue on montre que 10^n divise $B_{n+1}-B_n$ et B_{n+1} et B_n ont les mêmes n derniers chiffres.
$I_1=1$, $I_2=1$, $I_3=5$, $I_4=I_5=I_6=13$
$A_1=5$, $A_2=25$, $A_3=625$, $A_4=40625$, $A_5=2640625$

J_1=3, J_2=13, J_3=63, J_4=313 J_5=1563
B_1=6, B_1=156, B_3=19656, B_4=12304656 B_5=38464354656

2) Posons $u_n=[A_{n+1}]_n$, cad u_n est constitué des n+1 derniers chiffres de A_{n+1} ; comme A_{n+2} et A_{n+1} ont mêmes n+1 derniers chiffres, les n+1 derniers chiffres de u_{n+1} sont ceux de u_n.
On peut alors appliquer P1.2 : il existe effectivement un (seul) entier décadique x tel que $[x]_n=u_n$, ce qu'il fallait montrer.
Idem pour y.
$[x]_4=[A_5]_4=[2640625]_4=40625$: ce sont les 5 derniers chiffres de x.
$[y]_4=[B_5]_4=[38464354656]_4=54656$: ce sont les 5 derniers chiffres de y.

3)
Comme $[A_{n+1}]_n$ est l'entier constitué des n+1 derniers chiffres de A_{n+1}, on a $A_{n+1}\equiv[A_{n+1}]_n$ (10^{n+1}) ; de même $B_{n+1}\equiv[B_{n+1}]_n$ (10^{n+1}).
Or de façon évidente 5^{n+1} divise A_{n+1}, et comme $A_{n+1}\equiv[A_{n+1}]_n=[x]_n$ (10^{n+1}), c'est que 5^{n+1} divise $[x]_n$; de même 2^{n+1} divise $[y]_n$, cela pour tout $n\geq 0$.
Par application de P5.1 on en déduit que xy=0.

En fait $2^{n+1}\times 5^{n+1}=10^{n+1}$ divise $[x]_n[y]_n$, ce qui veut dire que les n+1 chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang $\leq n$ sont nuls ; ceci reprouve que xy=0 puisque, cf D1.3, les chiffres de xy de rang $\leq n$ sont les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang $\leq n$.

Vérification : $[x]_3[y]_3=0625\times 4656=625\times 4656=2910000$, et donc les 4 chiffres de $[x]_3[y]_3$ de rang≤ 3 sont bien nuls,
et aussi $[x]_4[y]_4=40625\times 54656=2220400000$, et donc les 5 chiffres de $[x]_4[y]_4$ de rang≤ 4 sont bien nuls.

<u>Exercice 4</u>
1) On cherche x et y deux entiers décadiques, dont les chiffres de rang n respectifs sont notés x_n et y_n, avec $x_0=2$, $y_0=5$ et tels que les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang$\leq n$ soient nuls.
Notons, pour $n\geq 0$, P_n la propriété : les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang$\leq n$ sont nuls.
Puisque $x_0=2$ et $y_0=5$, $[x]_0[y]_0=x_0y_0=10$ et P_0 est vraie.
Pour $n\geq 0$, supposons trouvés les chiffres de x et y de rang$\leq n$ tels que $P_0,\dots,P_n$ soient vraies, et cherchons x_{n+1} et y_{n+1} pour que P_{n+1} soit aussi vraie.
$[x]_{n+1}[y]_{n+1}=(10^{n+1}x_{n+1}+[x]_n)(10^{n+1}y_{n+1}+[y]_n)=10^{2n+2}x_{n+1}y_{n+1}+10^{n+1}(x_{n+1}[y]_n+y_{n+1}[x]_n)+[x]_n[y]_n$.
Soit c_{n+1} le chiffre de rang n+1 de $[x]_n[y]_n$: puisque les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang$\leq n$ sont nuls, alors
les chiffres $[x]_{n+1}[y]_{n+1}$ de rang$\leq n+1$ seront nuls $\Leftrightarrow x_{n+1}[y]_n+y_{n+1}[x]_n+c_{n+1}$ se termine par 0
$\Leftrightarrow x_{n+1}[y]_n+y_{n+1}[x]_n+c_{n+1}\equiv 0$ (10)
$\Leftrightarrow 5x_{n+1}+2y_{n+1}\equiv -c_{n+1}(10)$, puisque $[x]_n\equiv x_0=2$ (10) et $[y]_n\equiv y_0=5$ (10)
Or il existe u et v tels que 5u+2v=1 (cf Bezout, puisque 2 et 5 sont 1er entre eux) : on peut prendre u=1,v=-2 et donc $5(-c_{n+1})+4c_{n+1}=-c_{n+1}$.
D'où il suffit de prendre

$x_{n+1}\equiv -c_{n+1}$ (10) avec x_{n+1} dans {0;1;...;9}, et
$y_{n+1}\equiv 2c_{n+1}$ (10) avec y_{n+1} dans {0;1;...;9}
(mais ce n'est pas la seule possibilité)

pour assurer que P_{n+1} soit vraie.
Donc pour tout n ≥0, on peut trouver les chiffres de x et y de rang≤n tels que $P_0,...,P_n$ soient vraies : c'est bien ce qu'il fallait montrer.

2) Puisque pour tout n ≥0 les chiffres de $[x]_n[y]_n$ de rang≤n sont nuls, c'est que les chiffres de xy de rang ≤n sont nuls, donc tous les chiffres de xy sont nuls : xy=0.

3) Pour déterminer un exemple, on va appliquer tel que le raisonnement précédent (rappel : c_{n+1} est le chiffre de rang n+1 de $[x]_n[y]_n$).
$x_0=2$, $y_0=5$, $[x]_0[y]_0=10$, donc $c_1=1$
il faut $5x_1+2y_1\equiv-1$ (10) : $x_1=1$, $y_1=2$, $[x]_1[y]_1=12\times25=300$, $c_2=3$ (nota : on aurait pu prendre $x_1=9$ et =2)
il faut $5x_2+2y_2\equiv-3$ (10) : $x_2=1$, $y_2=1$, $[x]_2[y]_2=112\times125=1400$, $c_3=4$
il faut $5x_3+2y_3\equiv-4$ (10) : $x_3=2$, $y_3=3$, $[x]_3[y]_3=2112\times3125=6600000$, $c_4=0$
il faut $5x_4+2y_4\equiv0$ (10) : $x_4=0$, $y_4=0$, $[x]_4[y]_4=02112\times03125=6600000$, $c_5=6$
il faut $5x_5+2y_5\equiv-6$ (10) : $x_5=0$, $y_5=2$, $[x]_5[y]_5=002112\times203125=429000000$, $c_6=9$
il faut $5x_6+2y_6\equiv-9$ (10) : $x_6=1$, $y_6=8$, $[x]_6[y]_6=1002112\times8203125=8220450000000$, $c_7=5$
etc
On a donc trouvé un autre exemple de deux diviseurs de 0 associés :

l'un se termine par 1002112 et l'autre se termine par 8203125

4) Posons la multiplication

```
......x₃x₂x₁2
......y₃y₂y₁5
_____________
..........u0
..........v
_____________
..........w0
```

u est le dernier chiffre de $5x_1+1$, v le dernier chiffre de $2y_1$ et u+v se termine par w qui doit faire 0 : il faut donc que u+v≡0 (10) et comme u≡$5x_1+1$ (10) et v≡$2y_1$ (10) on doit avoir $5x_1+2y_1+1\equiv0$ (10) : c'est exactement la 1ière équation de l'exemple précédent ; faisons le même choix : $x_1=1$ et $y_1=2$.
On a alors

```
......x₃x₂12
......y₃y₂25
_____________
.........u60
.........24
.........v
_____________
.........w00
```

Cette fois u est le dernier chiffre de $5x_2$, v le dernier chiffre de $2y_2$ et u+2+v+1 (1=la retenue de 6+4) doit se terminer par w=0, donc u+v+3≡0 (10) soit $5x_2+2y_2+3\equiv0$ (10) : on retrouve la 2ième équation de l'exemple précédent.
Etc

retour plan de cette page

6-Sur l'équation $x^2=x$, x étant un nombre décadique.

L'équation x^2=x, x étant un nombre décadique (ou brenom), a exactement quatre solutions qui sont en fait des entiers décadiques (ou brenoms entiers) :

0 ; 1 ; a ; b

a et b sont non nuls et vérifient a+b=1 et ab=0

a se termine par 890625, et b par 109376

.

Note : un nombre égal à son carré est dit **idempotent**.

Une preuve de ce résultat est proposée ci-dessous sous forme d'exercice.

On verra cependant à P8.10 une autre façon, de justifier l'existence des quatre solutions de cette équation ; cette autre justification est plus rapide, ne nécessite pas d'expliciter a et b, mais elle nécessite la connaissance de résultats plus théoriques.

On verra aussi à l'exercice 6 de ce chapitre 8 deux autres façons d'obtenir les derniers chiffres de a et b : une comparaison des trois méthodes sera faite.

On verra aussi dans ce chapitre 8 que **tout polynôme de degré n à coefficients dans NB (10)**, c'est le cas du polynôme X^2-X avec n=2, **a au plus n^2 racines dans NB(10)**.
Bien entendu, le fait qu'un polynôme de degré n, à coefficients dans un anneau, puisse avoir plus de n racines dans cet anneau n'est pas une surprise : par exemple dans Z/24Z le polynôme X^2-1 a 8 racines!
Un autre exemple, similaire à l'objet de ce chapitre : dans Z/77Z, le polynôme X^2-X a quatre racines : 0 ; 1 ; 22 ; 56. Et là aussi on a, dans Z/77Z, 22+56=1 (car 78-1 est divisible, dans Z, par 77) et 22×56=0 (car 22×56 est divisible, dans Z, par 77).
Encore un exemple, mais pas "arithmétique" cette fois : dans l'anneau des matrices carrées 2×2 à éléments réels, le polynôme X^2-X a une infinité de racines!
En voici "quelques unes " : r étant un réel quelconque,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

sont toutes des racines de X^2-X, mais ce ne sont pas les seules!

Enfin, on verra au chapitre 9 (exercice 14) une petite généralisation de x^2=x, c'est-à-dire la résolution, dans NB(10), de l'équation (x-u)(x-v)=0, avec u et v entiers décadiques.
Mais le "clou", à mon goût, est le fait que toute solution, dans NB(10), de x^n=x ou de x^n=-x ou de x^n=1 (pour n≥2) est une des quinze solutions de x^5=x : voir chapitre 11

Exercice
1) Montrer que les solutions de x^2=x sont nécessairement dans EN(10).

A partir de maintenant x est supposé dans EN(10)

2) Pour tout n∈N, montrer que $[x^2]_n=[x]_n \Leftrightarrow [x^2]_n \equiv [x]_n\ (10^{n+1}) \Leftrightarrow ([x]_n)^2 \equiv [x]_n\ (10^{n+1})$

Pour tout n∈N,on dira que x vérifie P_n (ou que P_n est vraie)

si une de ces trois égalités est effectivement vraie

et on notera, pour tout n∈N^*, w_n le chiffre de rang n de $([x]_{n-1})^2$.

Remarque : la dernière égalité signifie que l'entier naturel $[x]_n$ (qui a n+1 chiffres, les premiers pouvant être nuls) est tel que son carré a pour n+1 derniers chiffres ses n+1 chiffres : c'est le cas par exemple de 25 dont le carré, 625, se termine par les deux chiffres de 25 ou le cas de 9376 dont le carré est 87909376 qui se termine par les quatre chiffres de 9376.

3) Montrer que $x^2=x \Leftrightarrow$ pour tout $n\in N$, x vérifie P_n.

4) Montrer que pour tout $n\in N^*$, x vérifie $P_n \Leftrightarrow$x vérifie P_{n-1} et $x_n(1-2x_0)\equiv w_n(10)$.

5) Montrer que

$x^2=x\Leftrightarrow x_0=0$ ou 1 ou 5 ou 6 et pour tout $n\in N^*$, $x_n\equiv w_n(1-2x_0)$ (10) ; attention le changement de membre de $1-2x_0$ par rapport à la question précédente n'est pas une erreur.

6) Montrer que l'équation $x^2=x$ a exactement quatre solutions dans NB(10), qui sont entières décadiques :

0 ; 1 ; a ; b avec a se terminant par 890625 et b se terminant par 109376.

En déduire que **ab=0, puis a+b=1**.

7) Montrer que pour tout $n\geq 1$

> le chiffre a_n de rang n de a est le chiffre de rang n de $([a]_{n-1})^2$
>
> (c'est cette régle qui en fait, a permis à la question précédente de trouver de proche en proche, à partir de $a_0=5$, les derniers chiffres de a)
>
> $[a]_n$ est constitué des n+1 derniers chiffres de $([a]_{n-1})^2$

et que pour tout $n\geq 0$

> $[a]_n$ est constitué des n+1 derniers chiffres de 5^e avec $e=2^n$ (on ne peut faire exposant d'exposant en html...)

8) Montrer que pour tout $n\geq 0$, $[a]_n+[b]_n=10^{n+1}+1$, $[a]_n[b]_n$ se termine par n+1 zéros et retrouver (cf Q6) que a+b=1 et ab=0.

9) Montrer que a et b ne sont pas périodiques.

10) Calculer $(a-b)^n$ en fonction de $n\in N^*$.

11) Montrer que pour tout $n\in N$, 5^{n+1} divise a et 2^{n+1} divise b.

12) Trouver quatre nombres décadiques égaux à leur inverse, c'est-à-dire trouver quatre solutions, dans NB(10), de l'équation $x^2=1$.

Une petite digression...pour donner au lecteur le courage de se lancer dans l'exercice!

> A propos de lois physiques, il semblerait que l'énergie du vide ou la fluctuation du vide prévue par la mécanique quantique s'exprimerait plus simplement en uilisant des nombres décadiques. En effet, en supposant que deux ondes d'énergies respectivement égales à a et b (les deux solutions non triviales de $x^2=x$), alors, même sans interférences et sans phénomème de compensation classique dans les ondes (les pics de la première onde sont absorbés par les creux de la seconde), le produit des énergies des deux ondes est nul! Donc on peut élaborer une physique où l'on dompterait plus facilement l'énergie du vide.

Trouvé sur le net, sous toutes réserves.

Solution de l'exercice du chapitre 6

1) Si x n'est pas entier décadique, il se termine par un chiffre, non nul, après la virgule, de rang $-r\leq -1$, et donc son carré va se terminer par un chiffre, non nul, de rang -2r : il ne peut être égal à x.

2) La 1ère équivalence résulte du fait que $[x^2]_n$ et $[x]_n$ sont dans $\{0;1;2;...;10^{n+1}-1\}$, et la 2ième de D1.3.

3) Evident, puisque $x^2=x$ équivaut à $[x^2]_n=[x]_n$, pour tout $n\in N$, cf D1.1.

4) $[x]_n=10^n x_n+[x]_{n-1}$ et donc $([x]_n)^2=10^{2n}x_n^2+([x]_{n-1})^2+2x_n[x]_{n-1}10^n$
et donc x vérifie $P_n\Leftrightarrow([x]_{n-1})^2+2x_n[x]_{n-1}10^n \equiv 10^n x_n+[x]_{n-1}$ (10^{n+1})
$\Leftrightarrow([x]_{n-1})^2-[x]_{n-1}+10^n x_n(2[x]_{n-1}-1)\equiv 0$ (10^{n+1}).
Donc, si x vérifie P_n, nécessairement 10^n divise $([x]_{n-1})^2-[x]_{n-1}$, donc nécessairement x vérifie P_{n-1} et alors on a aussi $(([x]_{n-1})^2-[x]_{n-1})/10^n+x_n(2[x]_{n-1}-1)\equiv 0$ (10).
Réciproquement, si on a ces deux conditions, par multiplication par 10^n de la 2ième, on voit que x vérifie P_n.
Donc x vérifie $P_n\Leftrightarrow$x vérifie P_{n-1} et $(([x]_{n-1})^2-[x]_{n-1})/10^n+x_n(2[x]_{n-1}-1)\equiv 0$ (10).
Mais lorsque P_{n-1} est vraie on a $([x]_{n-1})^2=K\times 10^n+[x]_{n-1}$, avec K entier naturel, dont le chiffre des unité est le chiffre de rang n de $([x]_{n-1})^2$, soit w_n ; donc $K \equiv w_n$ (10) ; ainsi
x vérifie $P_n\Leftrightarrow$x vérifie P_{n-1} et $w_n+x_n(2[x]_{n-1}-1)\equiv 0$ (10) ; enfin, comme $[x]_{n-1}\equiv x_0$ (10), on obtient
x vérifie $P_n\Leftrightarrow$x vérifie P_{n-1} et $x_n(1-2x_0)\equiv w_n$ (10)

5) x vérifie $P_0\Leftrightarrow([x]_0)^2\equiv[x]_0$ $(10)\Leftrightarrow(x_0)^2\equiv x_0$ (10), cad x_0^2 se termine par x_0 :
il est alors immédiat de vérifier que les seules possibilités pour x_0 sont 0 ou 1 ou 5 ou 6.
x_0 étant une de ces quatre valeurs on constate que $1-2x_0\equiv 1$ ou -1 (10), et donc l'inverse $1-2x_0$ modulo 10 est $1-2x_0$ et ainsi
$x_n(1-2x_0)\equiv w_n$ (10) $\Leftrightarrow$ $x_n\equiv w_n(1-2x_0)$ (10).

Si $x^2=x$ on a évidemment P_0 vraie, donc $x_0=0$ ou 1 ou 5 ou 6 et pour tout $n\in N^*$ on a $x_n\equiv w_n(1-2x_0)$ (10), cela cf les questions 3 et 4 et ci-dessus.
Réciproquement si on a $x_0=0$ ou 1 ou 5 ou 6 et pour tout $n\in N^*$ on a $x_n\equiv w_n(1-2x_0)\Leftrightarrow x_n(1-2x_0)\equiv w_n$ (10) :
P_0 est alors vérifiée ; mais $x_1(1-2x_0)\equiv w_1$ (10) : donc P_1 vérifié d'après la question 4)
mais $x_2(1-2x_0)\equiv w_2$ (10), donc P_2 vérifiée d'après la question 4)
mais ... etc : P_n est vérifiée pour tout $n\geq 0$, donc $x^2=x$.

6) Cf la question 5) et compte-tenu que si x_0 est fixé alors tous les x_n suivants sont déterminés de façon unique par $x_n\equiv w_n(1-2x_0)$ (10), l'équation $x^2=x$ a quatre solutions :
une qui se termine par 0, une qui se termine par 1, une qui se termine par 5, une qui se termine par 6.
Précisons ces quatre solutions (rappel w_n est le chiffre de rang n de $([x]_{n-1})^2$).
si x_0=0

pour tout $n\in N^*$ on a donc $x_n\equiv w_n$ (10), soit $x_n=w_n$
w_1 est le chiffre de rang 1 de $([x]_0)^2=x_0^2=0$, donc $w_1=0$, $x_1=0$ et $[x]_1=00=0$
w_2 est le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2=0$, donc $w_2=0$, $x_2=0$ et $[x]_2=000=0$
etc : pour tout $n\geq 0$, $x_n=0$ et donc **x=0**

si x_0=1

pour tout $n\in N^*$, $x_n\equiv -w_n$ (10), donc $x_n=10-w_n$ si w_n est non nul, sinon $x_n=w_n=0$.
w_1 est le chiffre de rang 1 de $([x]_0)^2=x_0^2=1$, donc $w_1=0$, $x_1=0$ et $[x]_1=01=1$

w_2 est le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2=1$, donc $w_2=0$, $x_2=0$ et $[x]_2=001=1$
etc : pour tout $n\geq 1$, $x_n=0$ et donc **$x=1$**

si $x_0=5$; la solution correspondante sera notée a

pour tout $n\in N^*$ on a donc $x_n\equiv w_n$ (10), soit $x_n=w_n$
w_1 est le chiffre de rang 1 de $([x]_0)^2=x_0{}^2=25$, donc $w_1=2$, $x_1=2$ et $[x]_1=25$
w_2 est le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2=625$, donc $w_2=6$, $x_2=6$ et $[x]_2=625$
w_3 est le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2=390625$, donc $w_3=0$, $x_3=0$ et $[x]_3=0625=625$
w_4 est le chiffre de rang 4 de $([x]_3)^2=390625$, donc $w_4=9$, $x_4=9$ et $[x]_4=90625$
w_5 est le chiffre de rang 5 de $([x]_4)^2=8212890625$, donc $w_5=8$, $x_5=8$ et $[x]_5=890625$
etc...

si $x_0=6$; la solution correspondante sera notée b

pour tout $n\geq 1$, $x_n\equiv w_n$, donc $x_n=10-w_n$ si w_n est non nul, sinon $x_n=w_n=0$.
w_1 est le chiffre de rang 1 de $([x]_0)^2=x_0{}^2=36$, donc $w_1=3$, $x_1=7$ et $[x]_1=76$
w_2 est le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2=5776$, donc $w_2=7$, $x_2=3$ et $[x]_2=376$
w_3 est le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2=141376$, donc $w_3=1$, $x_3=9$ et $[x]_3=9376$
w_4 est le chiffre de rang 4 de $([x]_3)^2=87909376$, donc $w_4=0$, $x_4=0$ et $[x]_4=09376=9376$
w_5 est le chiffre de rang 5 de $([x]_4)^2=87909376$, donc $w_5=9$, $x_5=1$ et $[x]_5=109376$
etc...

Montrons que ab=0 et a+b=1.
$(ab)^2=a^2b^2=ab$, donc ab est solution de $x^2=x$ et ainsi ab=0 ou 1 ou a ou b ; mais ab se terminant par 0, c'est que ab=0.
$(1-a)^2=1-2a+a^2=1-a$, donc 1-a est solution de $x^2=x$ et là aussi, c'est que 1-a=0 ou 1 ou a ou b ; mais 1-a se termine par 6, donc 1-a=b et a+b=1.

7) On a, pour tout $n\in N^*$, $a_n=w_n$ (voir question précédente : cas $x_0=5$) ; donc le chiffre de rang n de a, qui est a_n, est le chiffre de rang n de $([a]_{n-1})^2$.
Mais a vérifie P_{n-1}, soit $([a]_{n-1})^2\equiv[a]_{n-1}$ (10^n) ; par ailleurs $[a]_n\equiv[a]_{n-1}$ (10^n) et donc $([a]_{n-1})^2$ et $[a]_n$ ont respectivement les mêmes n derniers chiffres, cad ceux de rang$\leq$n-1, et finalement les n+1 chiffres de $[a]_n$ sont les n+1 derniers chiffres de $([a]_{n-1})^2$.

Montrons, par récurrence, que pour tout $n\in N$, $[a]_n$ est constitué des n+1 derniers chiffres de 5^e avec $e=2^n$.
C'est vrai pour n=0 car e=1, $5^e=5$ et puisque $[a]_0=5$, $[a]_0$ est bien constitué du dernier chiffre de 5^e.
Supposons que la propriété soit vraie pour $n\in N$:
donc $5^e=[a]_n+K10^{n+1}$, avec K dans Z ; on élève au carré et en notant $e'=2^{n+1}$, $5^{e'}=([a]_n)^2+K^2 10^{2n+2}+2K10^{n+1}[a]_n$.
Mais on vient de voir que $([a]_n)^2=[a]_{n+1}+K'10^{n+2}$, avec K' dans Z, et en outre comme $a_0=5$, $2[a]_n$ se termine par zéro.
On peut alors écrire que $5^{e'}=[a]_{n+1}+K''10^{n+2}$, avec K'' dans Z : donc $[a]_{n+1}$ a pour n+2 chiffres les n+2 derniers chiffres de $5^{e'}$, donc la propriété est vraie pour n+1.

8) Posons $z_n=10^{n+1}+1-[a]_n$ pour $n\in N$:
puisque $[a]_n\in\{0;1;...;10^{n+1}-1\}$ et se termine par 5, z_n est un entier naturel avec n+1 chiffres (avec

des 0 éventuellement au début) et se terminant par 6 ; par ailleurs $z_{n+1}-z_n=10^{n+2}-10^{n+1}-([a]_{n+1}-[a]_n)$ et comme $[a]_{n+1}-[a]_n\equiv 0\ (10^{n+1})$, on a $z_{n+1}-z_n\equiv 0\ (10^{n+1})$.
Ainsi z_{n+1} a pour n+1 derniers chiffres ceux de z_n et donc (voir P1.2) il existe un (seul) entier décadique z tel que $[z]_n=z_n$, pour tout $n\in N$.
Mais $z_n^2=10^{2n+2}+1+([a]_n)^2+2\times 10^{n+1}-2\times 10^{n+1}[a]_n-2[a]_n \equiv 1+([a]_n)^2-2[a]_n\ (10^{n+1})$;
et comme a vérifie P_n, on a $z_n^2\equiv 1+[a]_n-2[a]_n\equiv z_n\ (10^{n+1})$, soit $([z]_n)^2\equiv [z]_n\ (10^{n+1})$, pour tout $n\in N$.
Donc l'entier décadique z vérifie P_n pour tout $n\in N$ et ainsi z est solution de $x^2=x$; comme il se termine par 6, c'est que z=b.
Donc $[b]_n=[z]_n=z_n=10^{n+1}+1-[a]_n$, ce qu'il fallait montrer.

De $[a]_n+[b]_n=10^{n+1}+1$ on déduit que $[a]_n+[b]_n\equiv 1\ (10^{n+1})$, soit $[a]_n[b]_n+([b]_n)^2\equiv [b]_n\ (10^{n+1})$, ce qui donne, puisque b vérifie P_n, $[a]_n[b]_n\equiv 0\ (10^{n+1})$ et donc $[a]_n[b]_n$ se termine par n+1 zéros.
Par exemple $[a]_3[b]_3=0625\times 9376=625\times 9376=5860000$.

Toujours de $[a]_n+[b]_n=10^{n+1}+1$ on retrouve tout de suite (voir exercice 2 du chapitre 1) que a+b=1.
Remarque : par contre a+b=1 ne permet pas de remonter à $[a]_n+[b]_n=10^{n+1}+1$ (voir exercice 2 du chapitre 1).

Enfin, retrouvons que ab=0 :
1ière façon : cf D1.3 et ci-dessus, on a, pour tout $n\geq 0$, $[ab]_n\equiv [a]_n[b]_n\equiv 0\ (10^{n+1})$, et donc $[ab]_n=0$, cad tous les chiffres de ab de rang $\leq n$ sont nuls, donc tous les chiffres de ab sont nuls et ab=0.
2ième façon : puisque a+b=1 est acquis, $ab=a(1-a)=a-a^2=0$.

9) Supposons, par exemple que a soit périodique ; cf P3.7, a=p/q avec p dans Z^*, q dans Z^*. Donc $p^2/q^2=p/q$, soit $p^2q=pq^2$, égalité valable dans N(puisque la × de NB(10) prolonge celle de D) et comme dans N il n'y a pas de diviseurs de 0, on a p=q soit a=1, ce qui est faux.

10) Puisque ab=0, la formule du binôme donne tout de suite $(a-b)^n=a^n+(-1)^nb^n=a+(-1)^nb$, d'où

> si n est impair, $(a-b)^n=a-b$, c'est-à-dire a-b est solution de toute équation de la forme $x^{2p+1}=x$, avec p entier naturel
> si n est pair, $(a-b)^n=1$, c'est-à-dire a-b est racine nième de 1.

Voir P11.4 et P11.6 pour des appronfondissements sur ces deux aspects.

11)1ère méthode : on applique P5.2.
2ième méthode : a se termine par 5, donc 2a se termine par 0 et 2a=10a', avec a' entier décadique, soit a=5a' ; ce qui donne (puisque pour tout n dans N^*, $a^n=a$), pour tout n dans N^*, $a=5^na'^n$, ce qui prouve que 5^n divise a.
Et pour b : b se termine par 6, 5b se termine par 0, 5b=10b', avec b' entier décadique, b=2b', ce qui donne, pour tout n dans N^*, $b=2^n(b')^n$.

12) Comme solutions de $x^2=1$, il y a évidemment -1 et 1 ; mais aussi a-b et b-a, puisque on vient de voir (Q10) que $(a-b)^2=1$, et donc aussi $(b-a)^2=1$!
On verra au chapitre 9 que cette équation n'a pas d'autres solutions, c'est-à-dire, dans NB(10), 1 a exactement quatre racines carrées.

retour plan de cette page

7-Définition d'une distance dans l'ensemble des nombres décadiques

D7.1->On définit une application de NB(10) dans R (en fait dans D^+), appelée valeur absolue et notée $| |_{10}$ de la façon suivante :

$|0|_{10}=0$ et si $x\neq 0$, $|x|_{10}=10^{-z(x)}$ où z(x) est le rang du dernier chiffre non nul de x.

Précisons z(x) :

si x est un entier décadique (ou brenom entier), z(x) est le nombre de zéros situés à la fin du développement décadique de x
sinon, c'est que le développement décadique de x a des chiffres après la virgule, et -z(x) est alors le nombre de ces chiffres après la virgule, cad -z(x) est le r défini au D1.1.

<u>Exemples</u> :
$|600|_{10}=|1300600|_{10}=|.....(6)100|_{10}=10^{-2}$: tous les entiers décadiques se terminant exactement par deux zéros ont même valeur absolue 10^{-2}.
$|1300600,03|_{10}=10^2$: tous les nombres décadiques ayant deux chiffres après la virgule ont même valeur absolue : 10^2.
$|10^{1000}+1|_{10}=|1|_{10}=1$
$|-600|_{10}=|.....(9)400|_{10}=10^{-2}$

On constate donc des choses surprenantes, comme par exemple le fait que des nombres entiers très différents, ...au sens habituel, peuvent avoir ici la même valeur absolue!
Pourtant l'inégalité triangulaire est vérifiée par cette valeur absolue.

P7.1-> **Propriétés de cette valeur absolue** :

pour tout x dans NB(10) :
$|x|_{10}\geq 0$
$|x|_{10}=0\Leftrightarrow x=0$

pour tout x dans EN(10) :
$|x|_{10}\leq 1$
$|x|_{10}=1\Leftrightarrow$x ne se termine pas par 0

pour tout x dans NB(10), avec chiffres après la virgule :
$|x|_{10}\geq 10$
$|x|_{10}=10\Leftrightarrow$x a exactement un chiffre après la virgule

pour tout k dans Z :
$|10^k|_{10}=10^{-k}$

pour tout x et y dans NB(10) :
$|x|_{10}<|y|_{10}\Leftrightarrow z(x)>z(y)$

pour tout x dans NB(10):
$|-x|_{10}=|x|_{10}$

pour tout x et tout y dans NB(10) :
$|x+y|_{10} \leq \max(|x|_{10},|y|_{10}) \leq |x|_{10}+|y|_{10}$

A cause de la première inégalité précédente, cette valeur absolue est dite **ultra-métrique**

si $|x|_{10} \neq |y|_{10}$, alors $|x+y|_{10}=\max(|x|_{10},|y|_{10})$; cette égalité peut cependant avoir lieu même si $|x|_{10}=|y|_{10}$

Attention : cette valeur absolue, contrairement à la valeur absolue habituelle dans R, n'est pas multiplicative (cad on n'a pas, en général, $|xy|_{10}=|x|_{10}|y|_{10}$), mais cependant on a :
pour tout x et tout y dans NB(10), **$|xy|_{10} \leq |x|_{10}|y|_{10}$**

Exercice 1 : prouver P7.1

D7.2->**Distance et limite dans NB(10)**

En posant $d_{10}(x,y)=|x-y|_{10}=|y-x|_{10}$, pour tout x et y dans NB(10), **on obtient une distance dans NB(10)** ; c'est évident, vu les propriétés de la valeur absolue.

La suite $(u_n)_{\in N}$ de nombres décadiques (**attention, dans ce chapitre u_n désignera le terme générique d'une suite, et non le chiffre de rang n d'un nombre décadique**) converge, au sens de cette distance, vers le nombre décadique l s'écrit

$\lim_{10\,;\, n\to+\infty} u_n = l$ et signifie $\lim_{n\to+\infty} d_{10}(u_n,l)=0$ (là, il s'agit de la limite usuelle dans R)
.

en particulier **$\lim_{10;\, n\to+\infty} u_n=0$ siginfie $\lim_{n\to+\infty}|u_n|_{10}=0$ (limite usuelle)**

Pour des raisons de commodité, et puisque les limites seront toujours considérées pour n tendant vers plus l'infini, **j'écrirai uniquement $\lim_{10}$ pour une limite au sens de la distance d_{10} ou lim pour une limite au sens de la distance usuelle dans R**.

P7.2->**Quelques propriétés sur les limites au sens d_{10}.**

$\lim_{10} 10^n=0$

$(u_n)_{\in N}$ étant une suite d'entiers décadiques :

$\lim_{10} u_n=0 \Leftrightarrow$ le nombre de 0 à la fin de u_n tend (au sens habituel) vers l'infini.

Si $\lim_{10} u_n=l$ alors nécessairement l est un entier décadique

$\lim_{10} u_n=l \Leftrightarrow$ pour tout entier $K\geq 1$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$, les K derniers chiffres de u_n sont les K derniers chiffres de l (cad $[u_n]_{K-1}=[l]_{K-1}$)

x étant un nombre décadique

$\lim_{10} x^n=0 \Leftrightarrow$ x est un entier décadique se terminant par 0.

Soit x un nombre décadique :

> **la série de terme général x^n (cad la "fameuse" série géométrique ; $x^0=1$) est convergente (au sens d_{10})⇔ x est un entier décadique se terminant par 0,**
> **et si x est un entier décadique se terminant par 0, alors la somme de cette série est 1/(1-x), cad**
> **$\lim_{10} (1+x+x^2+...+x^n)=1/(1-x)$**
> **pour tout n≥0, les (n+1)z(x) derniers chiffres de 1/(1-x) sont les (n+1)z(x) derniers chiffres de $1+x+...+x^n$**

On notera que x se terminant par 0, z(x)≥1 et 1-x se termine par 1, et donc 1-x a effectivement un inverse qui est entier décadique (voir P4.1).
A titre d'exemple, montrons le ici pour x=10 :
$S_n=1+10+...+10^n$=l'entier naturel dont tous les n+1 chiffres sont égaux à 1 : donc si S_n a pour limite un entier décadique (au sens d_{10}), on peut penser que cette limite est "naturellement" l'entier décadique dont tous les chiffres sont 1, soit S=.....(1).
Vérifions : $d_{10}(S,S_n)=|S_n-S|_{10}=|S-S_n|_{10}=10^{-(n+1)}$, puisque $S-S_n$ se termine par n+1 zéros ; et donc $\lim d_{10}(S,S_n)=\lim 10^{-(n+1)}=0$ et S_n tend bien vers S (au sens d_{10}) ; on vérifie aussi que S est bien l'inverse de 1-x=-9 : voir exemple de P3.2.

En fait, lorsque x est une puissance de 10, plutôt que d'utiliser ce résultat sur la série géométrique pour trouver l'inverse de 1-x, il vaut mieux utiliser P3.1.

x étant un nombre décadique quelconque, et $[x]_n$ ayant la signification du D1.1 :

> **$\lim_{10} [x]_n=x$**

cad

> **$\lim_{10} x_n10^n+...+x_1 10+x_0+x_{-1}10^{-1}+...+x_{-r}10^{-r}=x$,**
> x_n étant le chiffre de rang n de x, -r≤0 étant le rang de son dernier chiffre.
>
> **Pour n≥0, $[x]_n$ est une valeur approchée de x à $10^{-(n+1)}$ près, au sens d_{10}**

<u>Exercice 2</u> : prouver P7.2

<u>Exercice 3</u> : trouver les 10 derniers chiffres de -1/19 et de 1/19 (sans ... poser la division) et trouver une période de leurs développements décimaux (tout cela dans EN(10), bien sûr).

<u>Exercice 4</u> : **on peut rattraper quelqu'un qui va 10 fois plus vite que soi...**
Sur une ligne droite, une puce se trouve 1cm derrière un kangourou : on dira qu'à cet instant, la puce est à l'abscisse 0 et le kangourou à l'abscisse 1.
La puce se met alors à progresser par bonds successifs de 1 cm, 10 cm, 10^2 cm, 10^3 cm,....., et chaque fois qu'elle fait un bond de 10^n cm, le kangourou fait un bond de 10^{n+1} cm.
1) Montrer, **en se placant dans un univers décadique**, qu'au bout d'une infinité de bonds, la puce rattrape le kangourou à une abscisse que l'on précisera.
2) Préciser, **en se placant dans un monde réel**, à quelle abscisse commune se trouvaient la puce et la kangourou avant qu'ils soient respectivement aux abscisses 0 et 1, sachant que pour faire ce déplacement initial, puce et kangourou sont partis de leur abscisse commune au même instant, ont effectué leurs trajets respectifs en un même temps, le kangourou ayant toujours une vitesse égale à 10 fois celle de la puce.

3) Si le lecteur en a envie, il peut discuter sur les résultats obtenus...et/ou éventuellement lire mes élucubrations.

Solution des exercices du chapitre 7

Exercice 1 : preuve de P7.1
Les premiers résultats sont évidents.
Prouvons $|-x|_{10}=|x|_{10}$.
cela résulte du fait que si x est un entier décadique, x et -x ont le même nombre de zéros à la fin, et si x est un nombre décadique avec des chiffres après la virgule, -x a le même nombre de chiffres après la virgule que x (voir P2.2 si le lecteur veut formaliser).

Prouvons $|x+y|_{10}\leq\max(|x|_{10},|y|_{10})$, avec égalité SI $|x|_{10}\neq|y|_{10}$
1er cas : x et y entiers décadiques

soit $z(x)=z(y)$
donc $|x|_{10}=|y|_{10}$ et aussi $z(x+y)\geq z(x)$, soit $|x+y|_{10}\leq|x|_{10}=\max(|x|_{10},|y|_{10})$ (on peut avoir l'égalité : x=10 et y=20, mais ce n'est pas obligé : x=10 et y=90)

soit z(x) et z(y) sont différents, par exemple $0\leq z(x)<z(y)$
donc $|y|_{10}<|x|_{10}$ et forcément $z(x+y)=z(x)$ (par exemple 200+7000=7200), soit $|x+y|_{10}=|x|_{10}=\max(|x|_{10},|y|_{10})$.

2ième cas : x et y nombres décadiques avec chiffres après la virgule

soit $z(x)=z(y)$
donc $|x|_{10}=|y|_{10}$ et le rang de la dernière décimale de x+y sera supérieure ou égale au rang de la dernière décimale de x (ou y) ; ce sera strictement supérieur ssi la somme des dernières décimales de x et de y est 10. On a donc toujours $z(x+y)\geq z(x)$, soit $|x+y|_{10}\leq|x|_{10}=\max(|x|_{10},|y|_{10})$.

soit z(x) et z(y) sont différents, par exemple $z(x)<z(y)\leq-1$
donc $|y|_{10}<|x|_{10}$ et le rang de la dernière décimale de x+y sera celui de la dernière décimale de x (par exemple 12,147+1,25=13,397) et $z(x+y)=z(x)$, soit $|x+y|_{10}=|x|_{10}=\max(|x|_{10},|y|_{10})$

3ième cas : x entier décadique, y nombre décadique avec chiffres après la virgule

donc $|x|_{10}\leq1<10\leq|y|_{10}$ et x+y a forcément des chiffres après la virgule avec $z(x+y)=z(y)$, soit $|x+y|_{10}=|y|_{10}=\max(|x|_{10},|y|_{10})$.

Bien entendu, **l'inégalité $\max(|x|_{10},|y|_{10})\leq|x|_{10}+|y|_{10}$** est évidente.

Prouvons maintenant $|xy|_{10}\leq|x|_{10}|y|_{10}$
Cela revient à montrer que $z(xy)\geq z(x)+z(y)$; **on notera qu'il n'y a pas forcément égalité** : si x=12,24, y=0,5 alors xy=6,12 et z(xy)=-2 alors que z(x)+z(y)=-2-1=-3 ou x=20, y=50 qui donnent z(xy)=3 alors que z(x)+z(y)=2
Dans le cas de deux entiers décadiques cette inégalité est évidente, puisque le nombre de zéros à la fin de xy est ≥ à la somme du nombre de zéros à la fin de x et du nombre de zéros à la fin de y ; c'est aussi évident pour deux nombres décadiques avec chiffres après la virgule, puisque le rang de de la dernière décimale de xy est ≥ à la somme des rangs des dernières décimales de x et y.

Reste le cas où x est un entier décadique et y un nombre décadique avec au moins un chiffre après la virgule ($-z(y)\geq 1$) ; **on notera que dans ce cas, $z(x)+z(y)=z(x)-(-z(y))$ est le nombre de zéros situés à la fin de x moins le nombre de chiffres après la virgule de y**.
On a alors deux cas :
soit $z(x)+z(y)\geq 0$

> et alors xy est un entier décadique se terminant par au moins $z(x)+z(y)$, donc $z(xy)\geq z(x)+z(y)$

soit $z(x)+z(y)<0$

> et alors xy est un nombre décadique avec au plus $-(z(x)+z(y))$ chiffres après la virgule, donc $-z(xy)\leq -(z(x)+z(y))$ et $z(xy)\geq z(x)+z(y)$

<u>Exercice 2</u> : preuve de P7.2
les deux premiers résultats sont évidents (pour le 2ième, $d_{10}(u_n,0)=10^{-k}$ avec $k=u_n$).

Les u_n étant des entiers décadiques, montrons que si $\lim_{10}u_n=l$ alors nécessairement l est un entier décadique
Sinon, l et donc $l-u_n$ a au moins un chiffre après la virgule et $|l-u_n|_{10}\geq 10$: donc $d_{10}(l,u_n)$ ne peut tendre vers 0 (au sens usuel), cad u_n ne peut tendre vers l (au sens de d_{10}).

Montrons que $\lim_{10} u_n=l \Leftrightarrow$ pour tout entier $K\geq 1$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$, les K derniers chiffres de u_n sont les K derniers chiffres de l
Cf ci-dessus l est un entier décadique, donc u_n-l aussi, et l'hypothèse se traduisant par $\lim_{10}u_n-l=0$, c'est que $z(u_n-l)$= nombre de zéros à la fin de u_n-l tend vers l'infini (voir le 2ième résultat de cette propriété).
Donc $\lim_{10} u_n=l\Leftrightarrow$ pour tout nombre $K>0$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$ on a $z(u_n-l)>K$.
Donc en prenant K entier quelconque, c'est que pour tout $n>n_0$, les K derniers chiffres (au moins) de u_n et l sont les mêmes.
Réciproquement, si pour tout entier $K\geq 1$, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n>n_0$, les K derniers chiffres de u_n sont les K derniers chiffres de l, c'est que pour tout nombre $K>0$, il existe un entier naturel n_0 (on prend celui correspondant à K'=(partie entière de K)+1=E(K)+1) tel que pour tout $n>n_0$ on a $z(u_n-1)>K'>K$ et donc $\lim_{10} u_n=l$.

Montrons que $\lim_{10} x^n=0\Leftrightarrow x$ est un entier décadique se terminant par 0.
Tout d'abord notons que si y est un entier décadique ne se terminant pas par 0, il en est de même de toutes ses puissances :

> cf D1.3, le dernier chiffre de y^n est congru à y_0^n modulo 10 : donc si y^n se terminait par 0, alors on aurait $y_0^n\equiv 0$ (10), donc 2 et 5 (qui sont des nombres premiers distincts) diviseraient y_0, donc 10 diviserait y_0, ce qui est impossible puisque $y_0\neq 0$.

Supposons que $\lim_{10} x^n=0$:

> a) il est impossible que x soit un nombre décimal avec chiffres après la virgule :
> en effet si x a r chiffres après la virgule ($r\geq 1$) alors $x=10^{-r}y$ avec y entier décadique ne se terminant pas par 0, donc $x^n=10^{-nr}y^n$ avec y^n ne se terminant pas par 0, et ainsi x^n est un nombre décadique dont la dernière décimale a pour rang -nr :

donc $|x^n|_{10}=10^{nr}=d_{10}(x^n,0)$, qui ne tend pas vers 0 (au sens usuel).
b) x est donc obligatoirement un entier décadique, et il se termine par 0
sinon, cf ci-dessus, x^n ne se terminerait jamais par 0 et on aurait toujours $|x^n|_{10}=1$ et $d_{10}(x^n,0)$ =1 ne tendrait pas vers 0 (au sens usuel).

Supposons que x soit un entier décadique se terminant par 0 :

alors $x=10y$ avec y entier décadique et $|x|_{10}\leq|10|_{10}|y|_{10}=10^{-1}|y|_{10}\leq10^{-1}$, et $|x^n|_{10}\leq(|x|_{10})^n\leq10^{-n}$, d'où $\lim d_{10}(x^n,0)=\lim |x^n|_{10}=0$ soit $\lim_{10} x^n=0$.

Montrons les résultats sur la série géométrique x^n
Posons, pour $n\geq0$, $\mathbf{S_n=1+x+...+x^n}$ ($S_0=1$).
Dire que la série x^n converge (au sens d_{10}), c'est dire que la suite S_n a une limite (au sens d_{10}) et donc $S_{n+1}-S_n=x^{n+1}$ doit tendre vers 0 (au sens d_{10}), ce qui exige que x soit un entier décadique se terminant par 0, cf le résultat précédent.
Donc on suppose maintenant que x est un entier décadique se terminant par 0.
On va utiliser la "fameuse formule" $(1+x+...+x^n)(1-x)=1-x^{n+1}$, formule valable dans tout anneau.
1-x se terminant par 1, il est inversible et son inverse, 1/(1-x), est un entier décadique (voir P4.1).
On peut alors écrire :
$1+x+...+x^n=(1-x^{n+1})/(1-x)$, soit $S_n-1/(1-x)=-x^{n+1}/(1-x)$ et
$|S_n-1/(1-x)|_{10}=|x^{n+1}/(1-x)|_{10}\leq|x^{n+1}|_{10}\times|1/(1-x)|_{10}=|x^{n+1}|_{10}$, puisque l'inverse de 1-x se termine par 1.
Or $\lim |x^{n+1}|_{10}=0$, puisque x se termine par 0 et **ainsi $\lim_{10} S_n=1/(1-x)$**.
De $|S_n-1/(1-x)|_{10}\leq|x^{n+1}|_{10}$, on déduit que $|S_n-1/(1-x)|\leq(|x|_{10})^{n+1}=10^{-(n+1)z(x)}$, et ainsi on peut dire que $S_n-1/(1-x)$ (entier décadique) se termine par au moins (n+1)z(x) zéros et donc S_n et 1/(1-x) ont les mêmes (n+1)z(x) derniers chiffres.
Ce qui s'écrit $[1/(1-x)]_{(n+1)z(x)-1}=[S_n]_{(n+1)z(x)-1}$, mais c'est un peu lourd....

Prouvons que $\lim_{10} [x]_n=x$
C'est tout simplement parce que pour $n\geq0$, $x-[x]_n$ est un entier décadique se terminant par au moins n+1 zéros, donc le nombre de zéros à la fin de $x-[x]_n$ tend vers l'infini et $\lim_{10} x-[x]_n=0$, soit $\lim_{10} [x]_n=x$.

Et le fait que $x-[x]_n$ soit un entier décadique (lorsque $n\geq0$) qui se termine par au moins n+1 zéros, permet d'écrire $|x-[x]_n|_{10}\leq10^{-(n+1)}$, ce qui prouve l'aspect valeur approchée. Bien entendu cette inégalité prouvait aussi $\lim_{10} [x]_n=x$.

Cette inégalité reste vraie pour $0>n\geq-r$, car alors $x-[x]_n$ aura au plus -(n+1) chiffres après la virgule ; par exemple si x=...1723,15674 alors $[x]_{-3}=0,00674$ et $x-[x]_{-3}=...1723,15$ a deux chiffres après la virgule (mais ca aurait pu être un seul, si 5 avait été 0) et donc sa norme est $10^2\leq10^{-(n+1)}$, puisque n=-3 ; mais ce cas, en terme de valeur approchée n'est pas très intéressant car on majore la distance $d_{10}(x,[x]_n)$ par des grands (au sens usuel) nombres!.

<u>Exercice 3</u>
Cf P7.3, les 10 derniers chiffres de -1/19=1/(1-x) avec x=20 (donc z(x)=1) sont les dix derniers chiffres de $1+20+...+20^9=5389473668421$, et donc
-1/19 se termine par 8947368421 et 1/19 par 1052631579
Evidemment, -1/19 et 1/19 étant des rationnels décadiques, leurs développements sont périodiques, mais il faut "aller plus loin" pour trouver leurs périodes.
On pourrait songer à utiliser P3.6, mais il faut commencer par chercher le développement de 1/19 dans R (voir ci-dessous).

En fait on peut obtenir directement ce développement dans EN(10), cela en utilisant une idée qui permet de montrer que tout rationnel p-adique est périodique, idée qui aurait pu être utilisée pour prouver P3.7.

Voici cette idée : 19 et 10 étant premiers entre eux, $10^{\varphi(x)}\equiv 1$ (19), φ étant la fonction d'Euler.
Donc $10^{18}\equiv 1$ (19) soit $10^{18}-1=19q$ avec q dans N (q=52631578947368421).
Cf note ci-dessous, on peut alors écrire
$-1/19=q/(1-10^{18})=q\lim_{10}(1+10^{18}+...+(10^{18})^n)=\lim_{10}(q+q10^{18}+...+q(10^{18})^n))$.
Or q s'écrit avec 17 chiffres, et comme 17<18 et que par ailleurs pour tout entier K≥1, -1/19 a pour K derniers chiffres les K derniers chiffres de $(q+q10^{18}+...+q(10^{18})^n))$, c'est que
-1/19=.....(052631578947368421).
On notera que cette période, sur 18 chiffres, s'écrit "c(u)""u" avec u=947368421, les " " étant là pour indiquer qu'on juxtapose les entiers u et c(u).
c(-1/19) a donc pour période "u""c(u)", et comme 1/19=c(-1/19)+1, on obtient **1/19=.....("c(u)""u")D avec D=c(u)+1 : cad 1/19 a même période que -1/19**, mais elle ne commence pas dès la fin, mais à partir de la 10ième décimale.
Et si on appliquait P3.6?
Par divisions euclidiennes "bien choisies" ou avec une calculatrice "puissante" ou en se reportant à la page 240 du livre Les inattendus mathémathiques de JP Delahaye, on trouve que dans R, 1/19=(s)..... avec s="c(u)""u" qui est sur 18 chiffres, ce qui conduit par application de P3.6 au développement suivant dans EN(10) de 1/19 :
1/19=.....(s')D' avec s'=c(s)="u""c(u)" et D'=c(s)+1 ; on remarque qu' ici la période, s', de 1/19 n'est pas la même que ci-dessus et en plus elle commence à partir de la 19 ième décimale, et non à partir de la 10ième.
Cela s'explique : D'="u""c(u)"+1="u""c(u)+1"="u""D", et donc on peut écrire 1/19=.....("c(u)""u")D : on retrouve le résultat ci-dessus.

Note : si $\lim_{10} u_n=l$, alors pour toute constante q on a : $\lim_{10} qu_n=ql$.
En effet $|qu_n-ql|_{10}\leq|q|_{10}|u_n-l|_{10}$ et comme $\lim |u_n-l|_{10}=0$, on a $\lim |qu_n-ql|_{10}=0$.

<u>Exercice 4</u>
1) Au bout d'une infinité de bonds

la puce a parcouru $1+10+10^2+10^3+....=1/(1-10)=-1/9$ et donc arrive à l'abscisse 0-1/9=-1/9
le kangourou a parcouru $10+10^2+10^3+....=1/(1-10)-1$ et donc arrive à l'abscisse 1+(-1/9-1)=-1/9

Ils se rejoignent à l'abscisse -1/9!

2) Soit x l'abscisse commune avant le bond de 1cm de la puce : x<0.

en un temps t la puce parcourt -x=vt et le kangourou parcourt -x+1=(10v)t

Donc 10(-x)=-x+1 et x=-1/9!

3) Je n'ai jamais été très performant en dissertations (toujours hors-sujet!)..., cependant voici deux "autres coïncidences" curieuses :

<u>1ère coïncidence</u>
Dans le corps des 2-adiques on a $1+2+2^2+2^3+...=1/(1-2)=-1$

Bien entendu, dans R muni de la distance habituelle, la série $u_n=2^n$ est divergente (série géométrique dont la valeur absolue de la raison n'est pas inférieure à 1), mais autorisons nous à

poser $S=1+2+2^2+2^3+...=1+2+4+8+16+....$
"Donc" $-2S=-2-4-8-16$ et par ajout membres à membres on obtient $S-2S=1$, soit $S=-1$!
En faisant des "tripatouillages" injustifiés sur une somme S qui n'existe pas dans R, on arrive à une valeur ... qui est la bonne dans les 2-adiques!

<u>2ième coïncidence</u>
Considérons cette fois la série $u_n=n$, qui elle aussi est divergente dans R, son terme général ne tendant pas vers zéro.
Là aussi posons tout de même S=1+2+3+4+5+6+7+8+........ et "tripatouillons"...

S=	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	6 +	7 +	8	+...
2S=		2 +	4 +	6 +	8 +	10 +	12 +	14	+...
S=			1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	6	+...
-4S=		-4		- 8		- 12		- 16	+...
-8S=			- 8		- 16		- 24		+...
-4S=				- 4		- 8		- 12	+...

Et par ajout membre à membre on obtient S+2S+S-4S-8S-4S=1+0+0+0+0+0+0+0+0+..., soit $S=-1/12$.

En fait, un autre "tripatouillage" tout à différent va redonner $S=-1/12$:
pour $|x|<1$, on a rigoureusement, dans R, $1-2x+3x^2-4x^3+...=1/(1+x)^2$ (pour cela dériver la relation $1-x+x^2-x^3+...=1/(1+x)$).
On fait alors, ce qui est interdit, x=1 dans cette identité, et on "obtient" 1-2+3-4+....=1/4 ; bien entendu cette égalité n'a aucun sens dans R, mais l'idée correspond au pincipe de sommation des séries divergentes d'Abel (on devrait plutôt dire : au procédé d'Abel pour associer à une série divergente un nombre appelé somme*).
Revenons à S :
S=1+2+3+4+...=1-2+3-4+5-6+....+2(2+4+6+8+....)=1/4+4S, ce qui donne encore S=-1/12!! C'est tout de même étonnant.

Encore plus étonnant : cette "association" entre 1+2+3+4+.... et -1/12 se retrouve "presque rigoureusement" à l'aide de la fameuse fonction zéta de Riemann : ξ.
Cette fonction est définie pour Re(s)>1 par $\xi(s)=1+1/2^s+1/3^s+....$ (note : cette série converge si et seulement si Re(s)>1) et elle se prolonge analytiquement sur C-{1}, cela de façon unique.
On démontre, rigoureusement, que la valeur de ce prolongement en -1 est -1/12, cad $\xi(-1)=-1/12$!!!
Si on remplace alors, dans l'égalité définissant ξ, s par -1, mais ce n'est pas rigoureux puisque on n'a pas Re(-1)>1, on obtient $-1/12=1+1/2^{-1}+1/3^{-1}+1/4^{-1}+...=1+2+3+4+....$!!!!
De là à écrire, -1/12=1+2+3+4+.... sans en expliquer le moindre contexte ne me paraît pas sérieux.
D'ailleurs, sous prétexte que f(x)=sinx/x se prolonge par continuité en 0, en posant f(0)=1, personne n'écrit sérieusement sin(0)/0=1.

retour plan de cette page

8-Lien entre entiers, nombres décadiques et entiers, nombres 2-adiques et 5-adiques

lien vers ce chapitre 8

9-Racines carrées d'un entier décadique.

lien vers ce chapitre 9

10-Calcul approché des racines carrées d'un entier relatif.

lien vers ce chapitre 10

11-Résolution des équations $x^n=x$, $x^n=-x$, $x^n=1$.

lien vers ce chapitre 11

retour plan de cette page