Retour vers le sommaire de la page sur les nombres décadiques

9-Racines carrées de brenoms.

En lisant les quelques pages de J-P Delahaye sur les brenoms, certes j'ai vu qu'il y avait des diviseurs de zéro ; mais cette situation se rencontre dans des anneaux bien connus (celui des matrices, ceux des entiers modulo n), et donc je ne n'en ai pas fait trop de cas.
Mais lorsque je suis tombé sur le fait que 41 est le plus petit entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier naturel et est le carré d'un entier décadique, alors là j'ai été interpellé et il a fallu que je cherche pourquoi....

Dans tout ce qui suit a et b désignerons les deux entiers décadiques qui sont les deux solutions non triviales de l'équation $x^2-x=0$, a se terminant par 5 et b se terminant par 6 : voir chapitre 6 et aussi l'exemple de P8.10.

P9.1->
1) **Un élément de NB(10) a au plus quatre racines carrées** (dans NB(10) évidemment).

2) Si un élément de NB(10) a une racine carrée alors il a un nombre pair de chiffres après la virgule ou c'est un entier décadique

3) Si y est dans NB(10) et posséde 2r chiffres après la virgule ($r\geq 1$), chercher ses racines carrées, c'est chercher les racines carrées de l'entier décadique $10^{2r}y$.

4) **Si y est dans EN(10), ses racines carrées ne peuvent être que dans EN(10)**.

5) **1 a exactement quatre racines carrées : -1 ; 1 ; a-b=2a-1=1-2b ; b-a=1-2a=2b-1** ; elles sont bien dans EN(10).

L'inverse de a-b est a-b, l'inverse de b-a est b-a, et pour n entier naturel pair non nul, a-b et b-a sont des racines nièmes de 1 : **on verra au chapitre 11 (P11.6) la détermination de toutes les racines nièmes de 1, pour tout n≥2.**

6) Rappelons (voir exercice 6 du chapitre 2) que 0 n'a qu'une racine carrée : 0.

Remarque : on a une situation tout à fait analogue au résultat du 5) dans (par exemple) Z/77Z. En effet dans Z/77Z, 1 posséde quatre racines carrés : -1 ; 1 ; 34 ; 43=-34. Et on peut vérifier (toujours dans Z/77Z) que 34=2×56-1 et 43=2×22-1, 22 et 56 étant les racines, dans Z/77Z, de X^2-X dans Z/77Z, autres que 0 et 1 (ce dernier point a déjà été au début du chapitre 6).

Exercice 1 : prouver P9.1

P9.2->
Soit y un entier décadique : on sait que ses racines carrées (éventuelles) x ne peuvent être qu'entières décadiques (cf P9.1). Précisons :

Il existe x dans EN(10) tel que $x^2=y \Leftrightarrow f_2(y)$ est un carré dans Z_2 et $f_5(y)$ est un carré dans Z_5
Si cette condition est vérifiée alors :

soit y=0 (la condition est effectivement vérifiée) et alors on retrouve qu'il a une seule racine carrée qui est 0

soit $y\neq 0$ et alors

si y n'est pas un diviseur de 0 il a (exactement) quatre racines carrées
si y est un diviseur de 0 il a (exactement) deux racines carrées

Remarque : un diviseur de 0 peut avoir des racines carrées : par exemple -a et a sont racines carrées de a, -b et b sont racines carrées de b.

Exercice 2 : prouver P9.2

P9.3-> **Soit $y\in EN(10)^*$ ayant (au moins) une racine carrée x_0 (forcément entière décadique cf P9.1) :**
si y n'est pas un diviseur de 0, il a (exactement) quatre racines carrées : $-x_0$; x_0 ; (a-b) x_0 ; (b-a)x_0.
si y est un diviseur de 0, il a (exactement) deux racines carrées : $-x_0$; x_0.

Conséquence : soit u un entier décadique non nul

si u n'est pas un diviseur de 0 alors u^2 a quatre racines carrées (distinctes) : -u ; u ; (a-b)u ; (b-a)u
si u est un diviseur de 0 alors u^2 a deux racines carrées (distinctes) : -u et u

Exemple : on vient de voir que 1 a quatre racines carrées, mais aussi 16 posséde quatre racines carrées : -4 ; 4 ; 4(a-b) ; 4(b-a) ; par contre **a ne posséde que deux racines carrées : -a et a (puisque a^2=a et a est diviseur de 0) ; de même b ne posséde que deux racines carrées -b et b**.

Exercice 3 : prouver P9.3

Exercice 4 :
Montrer que si $n\in N^*$ est un carré (d'un entier naturel) alors $n=2^{2u}5^{2v}k$, avec u,v,k entiers naturels et $k\equiv 1$ ou 9 (40).
La réciproque est-elle vraie?

Remarque : bien entendu, ce résultat va avoir un lien avec ce qui suit!

P9.4->
Soit e un entier relatif non nul (c'est évidemment un entier décadique ou brenom entier).
e est le carré d'un nombre décadique (donc d'un entier décadique) $\Leftrightarrow e=2^{2u}5^{2v}k$, avec u,v dans N et k dans Z^* tel que $k\equiv 1$ ou 9 (40)

Remarque 1 :
$k\equiv 1$ ou 9 (40), entraîne que k ne peut être divisible ni par 2, ni par 5 puisque aucun de ces deux nombres divise 40.

Remarque 2 :
si e est le carré d'un entier naturel, la condition ci-dessus est bien vérifiée, cf l'exercice 4.

Remarque 3 :
si e est l'opposé du carré d'un entier naturel, alors la condition n'est pas vérifiée (d'après l'exercice 4, $-e=2^{2u}5^{2v}k$ avec $k\equiv 1$ ou 9 (40) et donc $e=2^{2u}5^{2v}k$ avec $k\equiv 31$ ou 39 (40)).
On retrouve ainsi le fait que -1 n'a pas de racine carrée dans NB(10) : voir exercice 6 du chapitre 2.

Remarque 4 :
conséquence immédiate de cette propriété :

> **les plus petits entiers naturels≤100 qui ne sont pas des carrés dans N, mais sont des carrés dans NB(10) sont 41 ; 89 ; 129 ;...**
> **le plus grand entier relatif<0 qui est un carré dans NB(10) est -31.**

Remarque 5 :
Si e, entier relatif non nul, vérifie la condition ci-dessus, il a exactement quatre racines carrées entières décadiques, puisque étant inversible (voir P3.6), ce n'est pas un diviseur de 0 et on utilise P9.3.

Exercice 5 : prouver P9.4. On pourra utiliser l'aide suivante (il s'agit de deux résultats non rappelés dans le chapitre 8) :
soit $e\in Z^*$:

> e est un carré dans $Z_2 \Leftrightarrow e=2^{2u}e'$ avec u dans N, e' dans Z^* et $e'\equiv 1$ (8)
> e est un carré dans $Z_5 \Leftrightarrow e=5^{2v}e'$ avec v dans N, e' dans Z^* et $e'\equiv 1$ ou 4 (5) ; cette condition sur e' équivaut à e' résidu quadratique (non nul) de 5.

Exercice 6 :
1) Soit n un entier naturel, qui n'est pas un carré dans N, mais qui a des racines carrées entières décadiques ; montrer qu'aucune n'est périodique.
2) Soit n un entier naturel, carré de l'entier naturel m : ses racines carrées dans EN(10) sont donc -m, m, (a-b)m, (b-a)m. Lesquelles sont périodiques?

P9.5->
1) Soit e un entier relatif (c'est évidemment un entier décadique ou brenom entier) : on notera e_n les chiffres de son développement décadique (si e<0, il faut utiliser e=c(-e)+1 : voir D2.1 : par exemple -2031=.....(9)7969).

$e\equiv 1$ ou 9 (40)
$\Leftrightarrow$
$e_0=1$ ou 9 et $e_1=2p$ (avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p

2) Soit e un entier décadique et on note toujours e_n les chiffres de son développement décadique :

$e_0=1$ ou 9 et $e_1=2p$ (avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p
$\Leftrightarrow$
$[e]_2\equiv 1$ ou 9 (40)
$\Leftrightarrow$
pour tout $n\geq 2$, $[e]_n\equiv 1$ ou 9 (40)

Exercice 7 : prouver P9.5

P9.6->

Soit e un entier décadique, ses chiffres étant notés e_n pour $n\geq 0$.
Si e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p (voir le 2) de P9.5 pour des équivalences de cette condition), **alors e a quatre racines carrées entières décadiques**, qui s'obtiennent ainsi :

$$\mathbf{x^2=e}$$
$$\Leftrightarrow$$

1) x_0=1 ou 9 si e_0=1, x_0=3 ou 7 si e_0=9

2) x_0 ayant une des deux valeurs ci-dessus :

x_1 est une des deux solutions de $x_1x_0\equiv(e_1-K_0)/2$ (5) avec K_0=le chiffre de rang 1 de $(x_0)^2$: une des solutions est u dans {0;1;2;3;4}, l'autre est u+5

(cette caractérisation de x_1 équivaut à $([x]_1)^2\equiv[e]_1$ (100))

3) x_0 et x_1 étant choisis comme indiqué ci-dessus

pour tout $n\geq 2$, x_n est l'unique chiffre dans {0;1;...;9} vérifiant $([x]_n)^2\equiv[e]_n$ (10^{n+1}) ET le chiffre de rang n+1 de $([x]_n)^2$ a la parité de e_{n+1}.

Remarque 1 :
e a quatre racines carrées car il y a 2×2=4 possibilités pour le couple (x_0,x_1) et, pour chacun des ces quatres couples, les x_n suivants sont uniques ; bien entendu cela était attendu puisque e se terminant par 1 ou 9 ce n'est ni 0, ni un diviseur de 0 (soit parce que il est inversible cf P4.3, soit cf le 7) de P8.9, puisque 2 et 5 ne divisent pas e_0), et cf P9.3, si e a une racine carrée, il en a obligatoirement quatre.

Remarque 2 :
Ce résultat prouve non seulement **l'existence de quatre racines carrées** de e, mais en même temps il donne une **méthode** pour les obtenir.
De plus **cette preuve ne fait absolument pas appel aux corps p-adiques.**
Mais elle repose sur une idée que l'on retrouve lors de la recherche de racines carrées dans les corps p-adiques (note perso : $p75_4$, dossier Q_p).

Remarque 3 :
Bien sûr, si un entier décadique y s'écrit $e'=2^{2u}5^{2v}e$ avec u, v entiers naturels et e entier entier décadique vérifiant e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p , alors y a quatre racines carrées : celles de e multipliées par 2^u5^v.
Pour l'instant, la condition écrite sur l'entier décadique y en début de cette remarque, est une condition suffisante pour que y admette des racines carrées : elle est nécessaire pour des entiers relatifs non nuls (cf P9.4 et P9.5) : en fait on montrera plus loin (P9.8) qu'elle est aussi nécessaire pour les entiers décadiques inversibles (non nuls et non diviseurs de 0).

Remarque 4 :
Un entier décadique comme 25 a évidemment quatre racines carrées 5, -5, (a-b)5, (b-a)5 ; mais puisque ses trois derniers chiffres ne vérifient pas la condition e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p, le résultat P9.6 ne s'applique pas.
D'ailleurs ces quatre racines carrées se terminent respectivement par 05, 95, 45 , 55 : ici il y a un seul choix au niveau de x_0 et quatre au niveau de x_1.

Par contre si on considère 64, ses quatres racines carrées 8, -8, (a-b)8, (b-a)8 se terminent respectivement par 00008, 99992, 49992, 50008 : il y a deux choix au niveau de x_0, mais pour chacun des ces deux choix, x_1, x_2, x_3 sont les mêmes : c'est au niveau de x_4 qu'arrivent les deux autres choix.

Exercice 8 : prouver P9.6

Exercice 9 : application de la méthode P9.6.
1) Déterminer des valeurs approchées à 10^{-5} près des racines carrées de 41 : on commencera par trouver les 5 derniers chiffres de la racine carrée de 41 se terminant par 79 ; en déduire les 5 derniers chiffres des trois autres racines carrées de 79 ;
2) Vérifier que la racine carrée de 169 se terminant par 13 est 13 ; déterminer les 5 derniers chiffres des trois autres racines carrées de 13.
3) Donner des valeurs approchées à 10^{-5} près des quatre racines carrées de -31.

Pour obtenir des valeurs approchées plus précises voir **Calcul approché de racines carrées de brenoms, via un programme en java-script**

Exercice 10 : racines carrées d'un "véritable" entier décadique.
Soit e=.....(1)081 : il vérifie les hypothèses de P9.6 et donc il posséde quatre racines carrées (tout comme 81).
1) Exprimer ces quatres racines carrées en fonction de a et r, r étant une racine carrée de -271.
2) En prenant pour r la racine carrée de -271 qui se termine par 05325223 (vous pouvez vérifier cette terminaison en utilisant le lien ci-dessus), trouver les huit derniers chiffres d'une racine carrée R de e et vérifier que $([R]_7)^2 \equiv [e]_7$ (10^8).

P9.7->On donne ici la réciproque de P9.6.
Soit e un entier décadique, ses chiffres étant notés e_n pour $n \geq 0$.

Pour que e soit un carré (cad le carré d'un entier décadique), il est nécessaire que e_0=0 ou 1 ou 4 ou 5 ou 6 ou 9.

Voici la réciproque de P9.6 :

e est un carré (cad le carré d'un entier décadique) et se termine par 1 ou 9
$\Leftrightarrow$
e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p

Exercice 11 : prouver P9.7 (il s'agit évidemment de prouver le sens haut->bas, l'autre sens résultant de P9.6)

P9.8->**Généralisation de P9.4**
Soit y un entier décadique :

y est un carré (cad le carré d'un entier décadique) et est non nul et n'est pas un diviseur de 0
$\Leftrightarrow$
$y=2^{2u}5^{2v}e$ avec u et v deux entiers naturels
et e un entier décadique tel que e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p

Remarque :
compte-tenu de P9.5, on obtient ici une preuve de P9.4 **sans** utilisation des corps p-adiques.

Exercice 12 : prouver P9.8.

P9.9->**Sur les racines carrées d'entiers décadiques diviseurs de 0**.
On a vu (P9.3) qu'un diviseur de 0 entier décadique a au plus deux racines carrées ; mais pour l'instant je suis incapable de caractériser les entiers décadiques diviseurs de 0 admettant effectivement deux racines carrées.
Rappelons qu'un entier décadique diviseur de 0 se termine par 5 ou par un chiffre pair : voir P5.2
Je suis arrivé uniquement à ces quelques remarques :

1) un diviseur de 0 entier décadique x se terminant par 0 aura des racines carrées si et seulement si il se termine par un nombre pair de 0 et alors $x=(10^p)^2y$ avec y diviseur de 0 entier décadique ne se terminant pas par 0, donc on est ramené à chercher les racines carrées de diviseurs de 0 entiers décadiques ne se terminant pas par 0.

2) parmi les diviseurs de 0 entiers décadiques se terminant par 5, seuls ceux se terminant par 625 peuvent avoir des racines carrées : c'est le cas de a, mais pas celui de -a qui se termine par 375.

3) parmi les diviseurs de 0 entiers décadiques se terminant par un chiffre pair non nul, seuls ceux se terminant par 4 (donc par 04 ou 24 ou 44 ou 64) et ceux se terminant par 6 (donc par 16 ou 36 ou 56 ou 76) peuvent avoir des racines carrées : c'est cas de b qui se termine par 76 et aussi celui de -b qui se termine par 24 (voir chapitre 11, exercice sur l'équation $x^3=-x$, pour les racines carrées de -b).

4) tout diviseur de 0 entier décadique se terminant par 4 est égal à 4 fois un diviseur de 0 entier décadique se terminant par 6.
Donc chercher les racines carrées de diviseurs de 0 entiers décadiques se terminant par 4 revient à chercher les racines carrées de diviseurs de 0 entiers décadiques se terminant par 6.

Exercice 13 : prouver P9.9.

Exercice 14 :
1) Résoudre dans NB(10) l'équation $x^2+x+8=0$.
2) u et v étant deux entiers décadiques, résoudre dans NB(10) l'équation $(x-u)(x-v)=0$.
Cas particuliers u=0, v=1 et u=0, v=-1.

Remarque : on verra au chapitre 11 la résolution de toutes les équation ayant une des formes suivantes : $x^n=x$ ou $x^n=-x$ ou $x^n=1$.

Solution des exercices du chapitre 9

Exercice 1 : preuve de P9.1
1) Les racines carrées de y sont les racines (dans NB(10)) du polynôme X^2-y à coefficients dans NB(10) et de degré 2 ; cf P8.10 il a au plus quatre racines dans NB(10).

2) Soit x un nombre décadique racine carrée de y et soit r (≥0) le nombre de chiffres après la virgule de x : donc $x^2=y$ a 2r chiffres après la virgule ; si r=0, c'est que y est entier décadique.

3) Soit y avec 2r ($r\geq 1$) chiffres après la virgule, alors $10^{2r}y$ est entier décadique et comme $x^2=y\Leftrightarrow (10^r x)^2=10^{2r}y$, chercher les racines carrées de y, c'est bien chercher les racines carrées de l'entier décadique $10^{2r}y$.

4) Evident cf le 3).

5) Le fait que -1 ; 1; a-b=2a-1 ; b-a=1-2a sont des racines carrées de 1 a déjà été vu au chapitre 6 (dernière question de l'exercice) ; cf le 1) ci-dessus ce sont les seules.

Puisque $(a-b)^2=(b-a)^2=1$, c'est que l'inverse de a-b est a-b et l'inverse de b-a est b-a.
De façon générale, puisque ab=0, la formule du binôme donne $(a-b)^n=a^n+(-1)^n b^n=a+b=1$ si n est pair ; de même pour n pair $(b-a)^n=1$

Exercice 2 : preuve de P9.2
$x^2=y\Leftrightarrow f(x^2)=f(y)\Leftrightarrow (f_2(x^2),f_5(x^2))=(f_2(y),f_5(y)) \Leftrightarrow (f_2(x))^2=f_2(y)$ et $(f_5(x))^2=f_5(y)$
Donc $x^2=y \Rightarrow f_2(y)$ est un carré dans Z_2 et $f_5(y)$ est un carré dans Z_5.

Supposons cette condition remplie, c'est-à-dire supposons qu'il existe u dans Z_2 et v dans Z_5 tels que $f_2(y)=u^2$ et $f_5(y)=v^5$.
Alors $x^2=y \Leftrightarrow (f_2(x))^2=u^2$ et $(f_5(x))^2=v^2$.
Mais dans Z_2 et Z_2 il n'y a pas de diviseurs de 0 (car Z_2 et Z_5 sont inclus, respectivement, dans les corps Q_2 et Q_5), donc
$x^2=y \Leftrightarrow f_2(x)=u$ ou -u et $f_5(x)=v$ ou -v $\Leftrightarrow f(x)=(u,v)$ ou (u,-v) ou (-u,v) ou (-u,-v).
f étant une bijection, tout élément de $Z_2\times Z_5$ a un et un seul antécédent : on retrouve donc ici que y a au plus quatre racines carrées (voir P9.1) et il en aura exactement quatre si et seulement si les quatre couples (u,v), (u,-v), (-u,v), (-u,-v) sont distincts, c'est-à-dire si et seulement si u et v ne sont pas nuls.
D'où la discussion :

soit y=0 et alors u=v=0 et une seule possibilité pour x : f(x)=(0,0) soit x=0
soit $y\neq 0$
- soit y est diviseur de 0
  - et alors, cf P8.9, ($f_2(y)=0$ et $f_5(y)\neq 0$) ou ($f_2(y)\neq 0$ et $f_5(y)=0$), donc (u=0 et $v\neq 0$) ou ($u\neq 0$ et v=0),
  - donc, parmi les quatre couples, il n'y a que deux couples distincts : (0,v) et (0,-v) ou (u,0) et (-u,0), ce qui donne que deux antécédents et y a exactement deux racines carrées.
- soit y n'est pas diviseur de 0
  - cette fois, y étant non nul par ailleurs, $f_2(y)\neq 0$ et $f_5(y)\neq 0$ et donc $u\neq 0$ et $v\neq 0$, et ainsi les quatre couples sont distincts et y a exactement quatre racines carrées.

Exercice 3 : preuve de P9.3
Cf le 5) de P9.1, $-x_0$, x_0, $(a-b)x_0$, $(b-a)x_0$ sont quatre racines carrées de y.
Le problème est de savoir si elles sont distinctes lorsque y n'est pas diviseur de 0 et lesquelles sont distinctes lorsque y est diviseur de 0 : on pourra alors appliquer P9.2.
Tout d'abord notons que :

$x_0=-x_0\Leftrightarrow 2x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ (car 2 est inversible, cf P3.6)
$(a-b)x_0=(b-a)x_0\Leftrightarrow 2(a-b)x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ (car 2 inversible, ainsi que a-b qui se termine par 9 et voir P4.1 ou ... parceque son inverse est a-b, cf P9.1)

Or **x_0 est non nul**, puisqu'on a supposé y non nul : donc x_0 et $-x_0$ sont distincts ainsi que $(a-b)x_0$ et $(b-a)x_0$.
Notons $E=\{-x_0 ; x_0\}$ et $F=\{(a-b)x_0 ; (b-a)x_0\}$.
Cherchons à voir à quelle condition E et F ne sont pas disjoints :

> E et F non disjoints $\Leftrightarrow (a-b)x_0=x_0$ ou $(a-b)x_0=-x_0 \Leftrightarrow -2bx_0=0$ ou $2ax_0=0 \Leftrightarrow bx_0=0$ ou $ax_0=0$ (rappel : a+b=1)

D'où
si y n'est pas diviseur de 0

> alors x_0 n'est pas diviseur de 0 (voir P5.3, puisque x_0 est une racine carrée de y), donc, puisque par ailleurs $x_0 \neq 0$, ax_0 et bx_0 ne sont pas nuls, donc E et F sont disjoints, et ainsi $-x_0$, x_0, $(a-b)x_0$, $(b-a)x_0$ sont quatre racines carrées, distinctes 2 à 2, de y : ce sont les quatre racines carrées de y cf P9.2.

si y est diviseur de 0

> alors x_0 est diviseur de 0 (voir P5.3) et donc, cf le 9) de P8.9, $ax_0=0$ ou $bx_0=0$ et, cf ce qui précéde, on a E=F et alors on ne dispose, pour l'instant, que de deux racines carrées pour y, mais cf P9.2 ce sont forcément les seules.

Quant à la conséquence, elle résulte de façon immédiate de ce qui précéde, puisque u est une racine carrée de u^2 et d'après P5.3, u diviseur de $0 \Leftrightarrow u^2$ est diviseur de 0.

Exercice 4 :
D'après la décomposition en nombres premiers $n=2^{2u}5^{2v}k$ avec $k=K^{2w}$ et K premier avec 10 (bien sûr u, v, w sont des entiers naturels quelconques).
Il s'agit de montrer que $k \equiv 1$ ou 9 (40), ce qui revient à montrer que $K^2 \equiv 1$ ou 9 (40) : c'est nécessaire (on fait w=1) et c'est suffisant, car pour tout entier naturel w on a $1^w \equiv 1$ (40) et $9^w \equiv 1$ ou 9 (40) puisque $9^2 \equiv 1$ (40), ce qui entraîne que $9^{2p} \equiv 1$ (40) et $9^{2p+1} \equiv 9$ (40).
Par ailleurs si $K' \equiv K$ (40) alors $K'^{2w} \equiv K^{2w}$ (40) et K' premier avec 10 $\Leftrightarrow$ K premier avec 10.
Il suffit donc de montrer que pour $K \in \{1;3;7;9;11;13;17;19;21;23;27;29;31;33;37;39\}$ on a $K^2 \equiv 1$ ou 9 (40) : vérification laissée au lecteur.

Et pour le lecteur détestant les vérifications, voici une autre méhode.
Il s'agit de montrer que 40 divise k-1 ou que 40 divise k-9 ; comme $40=8\times5$ avec 8 et 5 premiers entre eux, cela revient à montrer que
(8 divise k-1 et 5 divise k-1) ou (8 divise k-9 et 5 divise k-9)
$\Leftrightarrow$(8 divise k-1 et 5 divise k-1) ou (8 divise k-1 et 5 divise k+1), puisque $9 \equiv 1$ (8) et $9 \equiv -1$ (5)
$\Leftrightarrow$ 8 divise k-1 et 5 divise k^2-1.
Mais $k=V^2$ avec $V=K^w$ premier avec 10 : il s'agit donc de montrer que si V est premier avec 10 alors 8 divise V^2-1 et 5 divise V^4-1.

> V premier avec 10 $\Rightarrow$V impair$\Rightarrow V=2q+1 \Rightarrow V^2-1=4q(q+1)$, et comme q ou q+1 est pair, V^2-1 est toujours divisible par 8.
> V premier avec 10$\Rightarrow$ 5 ne divise pas V et d'après le (petit) théorème de Fermat, 5 divise V^4-1.

On a bien prouvé le résultat sans vérification numérique.

La réciproque est fausse : $41=2^{2\times0}5^{2\times0}41$ et $41\equiv1\ (40)$, alors que 41 n'est pas le carré d'un entier naturel.

Exercice 5 : preuve de P9.4
D'après P9.2, e sera le carré d'un entier décadique est équivalent à $f_2(e)$ est un carré dans Z_2 et $f_5(e)$ est un carré dans Z_5 ; mais $f_2(e)=f_5(e)=e$ car e est dans Z (voir P8.7).
Donc e sera le carré d'un entier décadique est équivalent à e est un carré dans Z_2 et e est un carré dans Z_5 ; en écrivant $e=2^{2u}5^{2v}k$ (décomposition en nombres pemiers) avec k,dans Z, premier avec 10, et en utilisant l'aide on obtient :
e est le carré d'un entier décadique $\Leftrightarrow 5^{2v}k\equiv1\ (8)$ et $2^{2u}k\equiv1$ ou 4 (5).
Mais $5^{2v}=25^{v}\equiv1\ (8)$ et $2^{2u}=4^{u}\equiv1$ ou 4 (5), donc
e est le carré d'un entier décadique $\Leftrightarrow k\equiv1\ (8)$ et $k\equiv1$ ou 4 (5).
8 et 5 étant premiers entre eux, ($k\equiv1\ (8)$ et $k\equiv1\ (5)$)$\Leftrightarrow k\equiv1\ (40)$
et on a aussi, ce qui est moins évident, ($k\equiv1\ (8)$ et $k\equiv4\ (5)$) $\Leftrightarrow k\equiv9\ (40)$:

> en effet, si $k=1+8p$ et $k=4+5p'$, alors $8p-5p'=3$, $8(p-6)=5(p'-9)$, donc (théorème de Gauss) 5 divise p-6 et $p=6+5q$, soit $k=1+48+40q\equiv9\ (40)$
> réciproquement si $k\equiv9\ (40)$ on a évidemment $k\equiv1\ (8)$ et $k\equiv4\ (5)$
> ou, "plus joli", on applique le théoréme des restes chinoix (voir preuve de P8.7) pour résoudre le systéme {$k\equiv1\ (8)$ et $k\equiv4\ (5)$ }, d'inconnue k : $x_0=1$, $a=8$, $x_1=4$, $b=5$, et comme $2\times8-3\times5=1$, on peut prendre $u=2$, $v=-3$ et les solutions du systéme {$k\equiv1\ (8)$ et $k\equiv4\ (5)$ } sont $k\equiv aux_1+bvx_0\ (ab)$, soit $k\equiv64-15=49\ (40)$, ce qui donne bien $k\equiv9\ (40)$.

Finalement, e est le carré d'un entier décadique $\Leftrightarrow e=2^{2u}5^{2v}k$ avec $k\equiv1$ ou 9 (40).

Exemples : les entiers naturels ci-dessous qui sont écrits en gras sont ceux qui ne sont pas carrés d'entiers naturels .
cas u=v=0

> pour $k\equiv1\ (40)$ on obtient ... ; -119 ; -79 ; -39 ; 1 ; **41** ; 81 ; 121 ; **161** ; ...
> pour $k\equiv9\ (40)$ on obtient ... ; -111 ; -71 ; -31 ; 9 ; 49 ; **89** ; **129** ; 169 ; ...

cas u=1, v=0 (on multiplie les solutions précédentes par 4)

> pour $k\equiv1\ (40)$ on obtient ... ; -476 ; -316 ; -156 ; 4 ; **164** ; 324 ; 484 ; **644** ; ...
> pour $k\equiv9\ (40)$ on obtient ... ; -444 ; -284 ; -124 ; 36 ; 196 ; **356** ; **516** ; 676 ; ...

Exercice 6
1) Si n avait une racine carrée x périodique, alors x=p/q avec p et q rationnels (voir P3.7), donc $(p/q)^2=n$, et $p^2=nq^2$. Mais cette égalité est vraie dans Z, car la multiplication dans EN(10) prolonge celle de D.
Quitte alors à diviser p et q par leur pgcd, on peut supposer p et q 1er entre eux, donc p^2 et q^2 sont aussi 1er entre eux, et p^2 divise n (Th de gauss), et $n=n'p^2$, $1=n'q^2$ et donc n'=1 et $n=p^2$, ce qui est exclu par hypothèse.

2) m est périodique (période 0) et -m aussi (période 9) ; mais (2a-1)m et (1-2a)m ne le sont pas : si (2a-1)m était périodique, c'est que (2a-1)m=p/q avec p et q dans Z et a serait rationnel, donc périodique ce qui est faux : voir chapitre 6.

Exercice 7 : preuve de P9.5
1) Si e≡1 ou 9 (40), montrons que e vérifie **la propriété, notée Π : e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p=0**

ou 1 ou 2 ou 3 ou 4), e_2 a la parité de p.
Notons que e ne peut être nul.

1er cas : e>0

e=1+40k ou 9+40k avec k dans N, donc **e_0=1 ou 9**, et e_1 va être le chiffres des unités de 4k, donc **e_1 est pair**.

si e_0=1

si e_1=2p avec p=1 ou 3

soit p=1 et e=1+40k=.....21 :
4k se termine par 2, donc k se termine par 3 ou 8, donc k=10u+3 ou 10u+8 et e=121+400u ou 321+400u et e_2 est égal à 1+pair ou 3+pair, donc **e_2 est impair, soit la parité de p**
soit p=3 et e=1+40k=.....61 :
cette fois 4k se termine par 6, donc k se termine par 4 ou 9, donc k=10u+4 ou 10u+9 et e_2=161+400u ou 361+400u et, comme ci-dessus, **e_2 est impair, soit la parité de p**

si e_1=2p avec p=0 ou 2 ou 4

soit p=0 et e=1+40k=.....01 :
4k se termine par 0, donc k se termine par 5, donc k=10u+5 et e_2=201+400u et **e_2 est pair, soit la parité de p**
soit p=2 et e=1+40k=.....41 :
4k se termine par 4, donc k se termine par 1 ou 6, donc k=10u+1 ou 10u+6 et e_2=41+400u ou 241+400u et **e_2 est pair, soit la parité de p**
soit p=4 et e=1+40k=.....81 :
4k se termine par 8, donc k se termine par 2 ou 7, donc k=10u+2 ou 10u+7 et e_2=81+400u ou 281+400u et **e_2 est pair, soit la parité de p**

si e_0=9

e=9+40k avec k dans N, donc e=e'+8, avec e'=1+40k : donc e' vérifie la propriété Π (cf la démonstration du cas e_0=1) ; mais en ajoutant 8 à e' on ne modifie que son 1er chiffre, qui passe de 1 à 9 et reste impair, et donc e vérifie encore la propriété Π.

2ième cas : e<0

Rappelons que le développement décadique de e s'obtient à partir de e=c(-e)+1 (voir D2.1). Cf P2.4, $e\equiv[e]_2\ (10^3)$, donc $e\equiv[e]_2\ (40)$ puisque 40 divise 1000 ; ainsi $[e]_2\equiv 1$ ou 9 (40). Mais $[e]_2$ est un entier naturel >0, donc on peut lui appliquer la démonstration du 1er cas : $[e]_2$ vérifie la propriété Π ; or les trois derniers chiffres de $[e]_2$ sont les 3 derniers chiffres de e, donc e vérifie la propriété Π.

Montrons maintenant que si e_0=1 ou 9 et e_1=2p (avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4), e_2 a la parité de p alors $e\equiv 1$ ou 9 (40).

1er cas : e>0 (attention, pour cet énoncé P9.5, e désigne un entier relatif et les derniers chiffres de son développemnt décadique sont ceux de son écriture décimale que si e≥0)

Au niveau des deux derniers chiffres de e (de son écriture décimale ou de son développement décadique) il y a dix possibilités :

examinons d'abord les cas où e se termine par 1:
soit p=0, e_2=2q et $e=1000k+2q\times 100+1\equiv 1\ (40)$

soit p=1, e_2=2q+1 et e=1000k+(2q+1)×100+21=1000k+200q+121≡1 (40)
soit p=2, e_2=2q et e=1000k+2q×100+41≡1 (40)
soit p=3, e_2=2q+1 et e=1000k+(2q+1)×100+61=1000k+200q+161≡1 (40)
soit p=4, e_2=2q et e=1000k+2q×100+81≡1 (40)

Les cinq cas où e se termine par 9, revient à ajouter 8 aux cas précédents et donc pour ces cinq cas se terminant par 9, on a e≡1+8=9 (40)

2ième cas : e<0

On utilise la mêmes idée que dans le 2ième cas de la preuve dans le sens direct.
$[e]_2$ vérifie l'hypothèse, puisque ses 3 (derniers) chiffres sont les 3 derniers chiffres de e, et comme c'est un entier naturel positif on peut lui appliquer la preuve du 1er cas précédent : $[e]_2$≡1 ou 9 (40), mais cf P2.4, e≡$[e]_2$ (1000), donc e≡$[e]_2$ (40) et on a encore e≡1 ou 9 (40).

2) Les deux équivalences sont conséquences immédiates du 1), dans la mesure où pour tout n≥2, $[e]_n$ est un entier naturel dont les trois derniers chiffres sont e_2, e_1 et e_0.

Exercice 8 : preuve de P9.6
x^2=e⇔ pour tout n≥0, $[x^2]_n$≡$[e]_n$ (10^{n+1}), cf D1.1, ⇔ pour tout n≥0 $([x]_n)^2$≡$[e]_n$ (10^{n+1}) cf D1.3.

La condition de rang 0 donne :

$(x_0)^2$≡e_0 (10)
Soit e_0=1 et alors x_0=1 ou 9, soit e_0=9 et alors x_0=3 ou 7 : **donc pour un e donné, il y a uniquement deux possibilités pour x_0**

x_0 étant une des deux valeurs possibles, la condition de rang 1 donne :

$([x]_1)^2$≡$[e]_1$ (100), soit $(10x_1+x_0)^2$ ≡$10e_1+e_0$ (100) ⇔$20x_1x_0$≡$10e_1+e_0-(x_0)^2$ (100)
Mais, par choix de x_0, $(x_0)^2-e_0=10K_0$, avec K_0 dans N ; en fait
si e_0=1
soit x_0=1 et K_0=0
soit x_0=9 et K_0=8
si e_0=9
soit x_0=3 et K_0=0
soit x_0=7 et K_0=4
On constate alors que K_0 (qui est bien sûr toujours le chiffre de rang 1 de $(x_0)^2$) est toujours pair.
Finalement la condition de rang 1 s'écrit $2x_1x_0$≡e_1-K_0 (10) et comme e_1 est pair , ainsi que K_0, **la condition de rang 1 s'écrit x_1x_0≡$(e_1-K_0)/2$ (5)** ; évidemment si e_1 avait été impair, la condition de rang 1 n'aurait pas eu de solution et e n'aurait pas eu de racine carrée.
Comme x_0 (égal à 1 ou 3 ou 7 ou 9) est 1er avec 5, il a un inverse modulo 5 :
si x_0 est 1 ou 9, cet inverse est x_0 et x_1≡$(e_1-K_0)x_0/2$ (5)
si x_0 est 3 ou 7, cet inverse est $-x_0$ et x_1≡$-(e_1-K_0)x_0/2$ (5)

Il y a donc deux possibilités pour x_1, une, u, dans {0;1;2;3;4} et l'autre u+5.

(x_0, x_1) étant un des quatre couples possibles, la condition de rang 2 donne :

$([x]_2)^2 \equiv [e]_2$ (1000), soit $(100x_2+[x]_1)^2 \equiv 100e_2+[e]_1$ (1000)$\Leftrightarrow 200x_2[x]_1 \equiv 100e_2+[e]_1-([x]_1)^2$ (1000)

Mais $([x]_1)^2-[e]_1=100K_1$, avec K_1 dans Z (on verra plus loin qu'en fait $K_1 \in N$), et donc la condition de rang 2 s'écrit $2x_2[x]_1 \equiv e_2-K_1$ (10), soit puisque $[x]_1 \equiv x_0$ (10), $2x_2x_0 \equiv e_2-K_1$ (10).

Pour que cette équation d'inconnue x_2 admette des solutions, il est nécessaire que e_2-K_1 soit pair (puisque 2 divise le membre de gauche et 10), donc **K_1 doit avoir la même parité que e_2**, la parité de ce dernier dépendant de la valeur de e_1 (voir hypothèse).

Il s'agit donc de préciser K_1, ce qui va être le point le plus "longuet" de la démonstration.

1) **Montrons que $K_1 \geq 0$ et que le chiffre des unités de K_1 est le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2$** :

$([x]_1)^2=100K_1+[e]_1$; on ne peut avoir $K_1 \leq -1$ car le membre de droite serait $\leq -100+99=-1$, alors que le membre de gauche est le carré d'un entier naturel. Donc $K_1 \geq 0$, et puisque $[e]_1 \leq 99$, c'est que le chiffre des unités de K_1 est bien le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2$.

2) x_0 étant choisi, on a vu qu'il y a deux possibilités pour x_1 : montrons que ces deux possibilités u et u+5 donnent la même parité pour le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2$.

En effet, en posant $v=10u+x_0$, soit $([x]_1)^2=v^2$, soit $([x]_1)^2=(v+50)^2$; or $(v+50)^2-v^2=100(25+v)$ et comme v a pour chiffre des unités x_0 qui est impair, 25+v a son chiffre des unités pair, donc le chiffre de rang 2 de $(v+50)^2-v^2$ est pair, donc le chiffre de rang 2 de $(v+50)^2$ est celui de v^2 augmenté d'un nombre pair (on ne prend évidemment pas la retenue éventuelle), donc il a même parité que celui de v^2.

3) Pour chacun des quatres couples possibles (e_0, x_0), on va calculer K_1 pour un x_1 possible et vérifier ainsi que K_1 a toujours même parité que e_2.

Rappelons que par hypothèse, $e_1=2p$, avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4, et e_2 a la parité de p.

Rappelons aussi que $100K_1=(10x_1+x_0)^2-(10e_1+e_0)$ et que x_1 est solution de $x_1x_0 \equiv (e_1-K_0)/2$ (5).

cas $e_0=1$; $x_0=1$

Donc $K_0=0$, $x_1 \equiv e_1/2$ (5) ; on peut choisir $x_1=e_1/2=p$.

Ce qui donne $100K_1=(10p+1)^2-(20p+1)$, soit $K_1=p^2$, et K_1 a donc même parité que celle de p, donc que celle de e_2.

cas $e_0=1$; $x_0=9$

$K_0=8$, $9x_1 \equiv (e_1-8)/2$ (5), soit puisque $9 \equiv -1$ (5), $x_1 \equiv 4-e_1/2$ (5) et on peut prendre $x_1=4-e_1/2=4-p$.

D'où $100K_1=(10(4-p)+9)^2-(20p+1)$, soit $K_1=p^2-10p+24=p^2+$pair et K_1 a même parité que celle de p, donc que celle de e_2.

cas $e_0=9$; $x_0=3$

$K_0=0$, $3x_1 \equiv e_1/2$ (5), soit puisque $2\times 3 \equiv 1$ (5), $x_1 \equiv e_1$ (5) et on peut prendre $x_1=e_1=2p$.

D'où $100K_1=(20p+3)^2-(20p+9)$, soit $K_1=4p^2+p=p+$pair et K_1 a même parité que celle de p, donc que celle de e_2.

cas $e_0=9$; $x_0=7$

$K_0=4$, $7x_1 \equiv (e_1-4)/2$ (5), soit puisque $-2\times 7 \equiv 1$ (5), $x_1 \equiv 4-e_1$ (5) ; mais $4-e_1$ n'est pas toujours dans {0;1;...;9}, par contre c'est le cas de $9-e_{11}=9-e_1=9-2p$.

D'où $100K_1=(10(9-2p)+7)^2-(20p+9)$, soit $K_1=4p^2-39p+94=-39p+$pair et K_1 a même parité que celle de p, donc que celle de e_2.

Donc K_1 a toujours effectivement la même parité que e_2 et ainsi la condition de rang 2 s'écrit $x_2x_0\equiv(e_2-K_1)/2$ (5), et, puisque x_0 est 1er avec 5, on va encore avoir (même raisonnement que pour x_1) deux possibilités pour x_2, une, u', dans {0;1;2;3;4} et l'autre u'+5 ce qui devient ... gênant, car un nombre décadique ne peut avoir plus de quatre racines carrées (2×2×2=8!)
En fait, ce qui se passe c'est que pour pouvoir réaliser la condition de rang 3, seule une des ces deux valeurs va convenir .

Cette condition de rang 3 est

$([x]_3)^2\equiv[e]_3\ (10^4)$, soit
$(1000x_3+[x]_2)^2\equiv1000e_3+[e]_2\ (10^4)\Leftrightarrow2000x_3[x]_2\equiv1000e_3+[e]_2-([x]_2)^2\ (10^4)$.
Mais $([x]_2)^2-[e]_2=1000K_2$, avec K_2 dans N et le chiffre des unités de K_2 étant le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2$ (pour cet aspect, justification analogue à celle faite ci-dessus pour le fait que $K_1\geq0$ et que le chiffre des unités de K_1 est le chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2$).
Ainsi, la condition de rang 3 est $2x_3[x]_2\equiv e_3-K_2\ (10)$, soit puisque $[x]_2\equiv x_0\ (10)$, $2x_3x_0\equiv e_3-K_2$ (10), équation qui aura des solutions que si K_2 a la parité de e_3, et cela va être vrai que pour une des deux possibilités pour x_2.
En effet ici, contrairement au chiffre de rang 2 de $([x]_1)^2$, le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2$ a une parité qui n'est pas la même selon la valeur u' ou u'+5 que l'on prend pour x_2 :
en effet, en posant $v=100u'+[x]_1$, soit $([x]_2)^2=v^2$, soit $([x]_2)^2=(v+500)^2$ et $(v+500)^2-v^2=1000(v+250)$; or v se termine par x_0 qui est impair, donc le chiffre des unités de v+250 est impair donc le chiffre de rang 3 de $(v+500)^2-v^2$ est impair (et les chiffres de $(v+500)^2-v^2$ de rangs 0,1,2 sont nuls), donc le chiffre de rang 3 de $(v+500)^2$ est celui de v^2 augmenté d'un nombre impair, donc il n'a pas même parité que celui de v^2.
Ce qui veut dire qu'il y a une seule possibilité pour x_2, solution de la condition de rang 2, qui fait que le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2$ (qui est le chiffre des unités de K_2) a pour parité celle de e_3 et ainsi K_2 et e_3 ont même parité et **la condition de rang 3 s'écrit $x_3x_0\equiv(e_3-K_2)/2$ (5)**.
Equation qui a encore deux solutions, puisque x_0 est 1er avec 5, une, u'', dans {0;1;2;3;4} et une autre u''+5 ; mais là encore, une seule de ces solutions assurera que l'on puisse trouver une solution x_4 à la condition de rang 4 : c'est la solution x_3=u'' ou u''+5, telle que le chiffre de rang 4 de $([x]_3)^2$ a pour parité celle de e_4. Etc ...

Bien sûr, on peut écrire une **récurrence**.... La voici, mais elle est plus pour moi que pour le lecteur, car c'est pratiquement un copié-collé de la recherche de x_3.

Soient (x_0, x_1) un des quatre couples assurant que les conditions de rang 0 et 1 soient vérifiées.

On note, pour n≥2, la propriété Π_n : il existe un seul x_n tel que $([x]_n)^2\equiv[e]_n\ (10^{n+1})$ et le chiffre de rang n+1 de $([x]_n)^2$ a pour parité celle de e_{n+1}.
Π_2 a été vérifiée.
Montrons pour n≥2, que si Π_n est vraie alors Π_{n+1} est vraie.

La condition de rang n+1 donne $([x]_{n+1})^2\equiv[e]_{n+1}\ (10^{n+2})$, soit $(10^{n+1}x_{n+1}+[x]_n)^2\equiv10^{n+1}e_{n+1}+[e]_n\ (10^{n+2})$; mais par hypothèse de récurrence, $([x]_n)^2-[e]_n=K_n10^{n+1}$, K_n ayant pour chiffre des unités le chiffre de rang n+1 de $([x]_n)^2$, et ainsi $2x_{n+1}[x]_n\equiv e_{n+1}-K_n\ (10)$.
Mais par hypothèse de récurrence, le chiffre des unités de K_n a la parité de e_{n+1}, et donc K_n et e_{n+1} ont même parité et on peut diviser par 2 : $x_{n+1}x_0\equiv(e_{n+1}-K_n)/2$ (5).
x_0 étant premier avec 5, il y a deux solutions (dans {0;1;...;9}) : $u^{(n)}$ et $u^{(n)}+5$.

Reste à justifier qu'une seule de ces deux solutions assure que le chiffre de rang n+2 de $([x]_{n+1})^2$ a la parité de e_{n+2}.
Posons $v=10^{n+1}u^{(n)}+[x]_n$, donc $([x]_{n+1})^2=v^2$ ou $(v+5\times10^{n+1})^2$; or $d=(v+5\times10^{n+1})^2-v^2=10^{n+2}(v+25\times10^n)$ et comme v se termine par x_0 qui est impair et que $n\geq2$, le chiffre des unités de $v+25\times10^n$ est impair, donc le chiffre de rang n+2 de d est impair (les chiffres précédents étant nuls), donc les chiffres de rang n+2 de $(v+5\times10^n)^2$ et v^2 n'ont pas la même parité, donc un seul de ces deux nombres a un chiffre de rang n+2 dont la parité est celle de e_{n+2}, ce qui donne une et une seule possibilité pour que x_{n+1} vérifie la condition de rang n+1, et que le chiffre de rang n+2 de $([x]_{n+1})^2$ ait la parité de e_{n+2}. Ce qui prouve Π_{n+1}.

Exercice 9 : application de P9.6 à e=41, e=169, e=-31, **valeurs toutes égales à 1 ou 9 modulo 40**

1) On cherche les entiers décadiques x tel que $x^2=e$ avec e=169.
$e_0=1$, donc $x_0=1$ ou 9 : prenons $\mathbf{x_0=9}$ cf énoncé.

x_1 solution de $(10x_1+9)^2\equiv[e]_1=41$ (100), soit $180x_1\equiv-40$ (100), soit $18x_1\equiv-4$ (10), puis $9x_1\equiv-2$ (5), soit puisque $9\equiv-1$ (5), $x_1\equiv2$ (5), ce qui donne 2 et 7 comme solutions : prenons $\mathbf{x_1=7}$,cf énoncé.

x_2 solution de $(100x_2+79)^2\equiv[e]_2=41$ (1000) ET en plus x_2 doit être tel que le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2$ doit avoir la parité de $e_3=0$.

La congruence donne $200\times79x_2\equiv-6200$ (1000), soit $2\times79x_2\equiv-62$ (10), $2\times(-1)x_2\equiv-2$ (10), $-x_2\equiv-1$ (5) et $x_2\equiv1$ (5), soit deux solutions $x_2=1$ ou 6 ;
mais $179^2=32041$, dont le chiffre de rang 3 est 2 qui est pair, et $679^2=461041$, dont le chiffre de rang 3 est 1 qui est impair ;
donc, cette fois une seule possibilité qui est $\mathbf{x_2=1}$.

x_3 solution de $(1000x_3+179)^2\equiv[e]_3=41$ (10000) ET en plus x_3 doit être tel que le chiffre de rang 4 de $([x]_3)^2$ doit avoir la parité de $e_4=0$.

La congruence donne $2000\times179x_3\equiv-32000$ (10000), soit $2\times179x_3\equiv-32$ (10), $2\times(-1)x_3\equiv-2$ (10), $-x_3\equiv-1$ (5) et $x_3\equiv1$ (5), soit deux solutions $x_3=1$ ou 6 ;
mais $1179^2=1390041$, dont le chiffre de rang 4 est 9 qui est impair, et $6179^2=3180041$, dont le chiffre de rang 4 est 8 qui est pair ;
donc, la seule possibilité est $\mathbf{x_3=6}$.

x_4 solution de $(10000x_4+6179)^2\equiv[e]_4=41$ (100000) ET en plus x_4 doit être tel que le chiffre de rang 5 de $([x]_4)^2$ doit avoir la parité de $e_5=0$.

La congruence donne $20000\times6179x_4\equiv-38180000$ (100000), soit $2\times6179x_4\equiv-3818$ (10), $2\times9x_2\equiv-8$ (10), $9x_4\equiv-4$ (5), $-x_4\equiv-4$ (5) et $x_4\equiv4$ (5), soit deux solutions $x_4=4$ ou 9 ;
mais $46179^2=2132500041$, dont le chiffre de rang 5 est 5 qui est impair, et $96179^2=9250400041$, dont le chiffre de rang 5 est 4 qui est pair ;
donc, la seule possibilité est $\mathbf{x_4=9}$.
(Bien entendu, le fait que 46179^2 et 96179^2 soient égaux à 41 modulo 100000 n'est pas une surprise, puisque ces deux valeurs de x_4 vérifient $([x]_4)^2\equiv41$ (100000) !)

Donc une racine carrée entière décadique de 41 est r_1=.....96179.

Les autres sont, cf P9.3, $r_2=-r_1$; $r_3=(2a-1)r_1$ et $r_4=-r_3$.

r_2=.....03821, cf -x=c(x)+1 (voir D2.1)

Pour r_3, on utilise D1.2 et D1.3 : x et y étant deux entiers décadiques, les cinq derniers chiffres de x+y sont les cinq derniers chiffres de $[x]_4+[y]_4$ et les cinq derniers chiffres de xy sont les cinq derniers chiffres de $[x]_4[y]_4$.
cf le chapitre 6, $[a]_4=90625$, donc $[2a]_4=81250$ et $[2a-1]_4=81249$.
Donc les cinq derniers chiffres de r_3 sont les cinq derniers chiffres de 81249×96179=7814447571, et donc r_3 se termine par 47571 :
r_3=.....47571, et r_4=.....52429.

Finalement, les valeurs approchées à 10^{-5} près (voir P7.2) des quatres racines carrées de 41 sont :

r_1=.....96179 ; r_2=.....03821 ; r_3=.....47571 ; r_4=.....52429

Le lecteur peut vérifier que les carrés de 96179, 03821, 47571, 52429 sont tous égaux à 41 modulo 10^5.

2) On cherche les entiers décadiques x tel que $x^2=e$ avec e=169.
$e_0=9$, donc x_0=3 ou 7 : prenons **x_0=3** cf énoncé.

x_1 solution de $(10x_1+3)^2\equiv[e]_1=69$ (100), soit $60x_1\equiv60$ (100), soit $6x_1\equiv6$ (10), puis $3x_1\equiv3$ (5), soit $x_1\equiv1$ (5), ce qui donne 1 et 6 comme solutions : prenons **x_1=1** ,cf énoncé.

x_2 solution de $(100x_2+13)^2\equiv[e]_2=169$ (1000) ET en plus x_2 doit être tel que le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2$ doit avoir la parité de e_3=0.

> La congruence donne $200\times13x_2\equiv0$ (1000), soit $26x_2\equiv0$ (10), $6x_2\equiv0$ (10), $3x_2\equiv0$ (5), $x_2\equiv0$ (5), ce qui donne deux solutions x_2=0 ou 5 ;
> mais 013^2=169, dont le chiffre de rang 3 est 0 qui est pair, et 513^2=263169, dont le chiffre de rang 3 est 3 qui est impair ;
> donc, une seule possibilité qui est **x_2=0**.

x_3 solution de $(1000x_3+13)^2\equiv[e]_3=169$ (10000) ET en plus x_3 doit être tel que le chiffre de rang 4 de $([x]_3)^2$ doit avoir la parité de e_4=0.

> La congruence donne $2000\times13x_3\equiv0$ (10000), soit $26x_3\equiv0$ (10), $6x_3\equiv0$ (10), $3x_3\equiv0$ (5), $x_3\equiv0$ (5), ce qui donne deux solutions x_3=0 ou 5
> mais 0013^2=169, dont le chiffre de rang 4 est 0 qui est pair, et 5013^2=25130169, dont le chiffre de rang 4 est 3 qui est impair ;
> donc, une seule possibilité qui est **x_3=0**.

Etc : on va toujours obtenir x_n=0, pour n≥2. En effet, le lecteur peut vérifier que pour n≥3 alors $(5\times10^n+13)^2$=50...013^2 (il y a n-2 zéros entre 5 et 13)=250...0130...0169, avec n-3 zéros entre 25 et 13, n-2 zéros entre 13 et 169 ; ainsi le chiffre de rang n+1 de 50...13^2 est toujours 3 impair.

En utilisant les mêmes idées qu'à la fin de la question précédente, on trouve que les valeurs approchées à 10^{-5} près (voir P7.2) des quatres racines carrées de 169 sont :

r_1=13 (valeur exacte) ; r_2=-13=.....(9)87 (valeur exacte) ; r_3=.....56237 ; r_4=.....43763

Le lecteur peut vérifier que les carrés de 13, 99987, 56237, 43763 sont tous égaux à 169 modulo 10^5.

3) On cherche les entiers décadiques x tel que $x^2=e$ avec e=-31
Là, la première chose à faire est de chercher le développement décadique : e=.....(9)69.
$e_0=9$, donc $x_0=3$ ou 7 : prenons $\mathbf{x_0=3}$.

x_1 solution de $(10x_1+3)^2\equiv[e]_1=69$ (100), soit $60x_1\equiv60$ (100), soit $6x_1\equiv6$ (10), puis $3x_1\equiv3$ (5), soit $x_1\equiv1$ (5), ce qui donne 1 et 6 comme solutions : prenons $\mathbf{x_1=1}$.

x_2 solution de $(100x_2+13)^2\equiv[e]_2=969$ (1000) ET en plus x_2 doit être tel que le chiffre de rang 3 de $([x]_2)^2$ doit avoir la parité de $e_3=9$.

> La congruence donne $200\times13x_2\equiv800$ (1000), soit $2\times13x_2\equiv8$ (10), $13x_2\equiv4$ (5), $3x_2\equiv4$ (5) et $x_2\equiv3$ (5), soit deux solutions $x_2=3$ ou 8 ;
> mais $313^2=97969$, dont le chiffre de rang 3 est 7 qui est impair, et $813^2=660969$, dont le chiffre de rang 3 est 0 qui est pair ;
> donc, la seule possibilité est $\mathbf{x_2=3}$.

x_3 solution de $(1000x_3+313)^2\equiv[e]_3=9969$ (10000) ET en plus x_3 doit être tel que le chiffre de rang 4 de $([x]_3)^2$ doit avoir la parité de $e_4=9$.

> La congruence donne $2000\times313x_3\equiv-88000$ (10000), soit $2\times313x_3\equiv-88$ (10), $313x_3\equiv-44$ (5), $3x_3\equiv1$ (5) et $x_3\equiv2$ (5), soit deux solutions $x_3=2$ ou 7 ;
> mais $2313^2=5349969$, dont le chiffre de rang 4 est 4 qui est pair, et $7313^2=53479969$, dont le chiffre de rang 4 est 7 qui est impair ;
> donc, la seule possibilité est $\mathbf{x_3=7}$.

x_4 solution de $(10000x_4+7313)^2\equiv[e]_4=99969$ (100000) ET en plus x_4 doit être tel que le chiffre de rang 5 de $([x]_4)^2$ doit avoir la parité de $e_5=9$.

> La congruence donne $20000\times7313x_4\equiv-53380000$ (100000), soit $2\times7313x_4\equiv-5338$ (10), $2\times3x_2\equiv-8$ (10), $3x_4\equiv-4$ (5), et $x_4\equiv2$ (5), soit deux solutions $x_4=2$ ou 7 ;
> mais $27313^2=745999969$, dont le chiffre de rang 5 est 9 qui est impair, et $77313^2=5977299969$, dont le chiffre de rang 5 est 2 qui est pair ;
> donc, la seule possibilité est $\mathbf{x_4=2}$.

Une racine carrée entière décadique de -31 est $\mathbf{r_1}$=.....27313

Et en utilisant les mêmes idées qu'à la fin de la question précédente, on trouve que les valeurs approchées à 10^{-5} près (voir P7.2) des quatres racines carrées de -31 sont :

r_1=.....27313 ; r_2=.....72687 ; r_3=.....53937 ; r_4=.....46063

Le lecteur peut vérifier que les carrés de 27313, 72687, 53937, 46063 se terminent par 99969 et donc sont bien égaux à -31 modulo 10^5

Exercice 10
1) e est en fait très particulier : il est périodique, donc c'est un rationnel (voir P3.7) ;
e=.....(1)×1000+81, et cf P3.2 par exemple, e=(-1/9)×1000+81=-271/9.

Comme -271≡9 (40) il admet quatre racines carrées r, -r, (a-b)r, (b-a)r ; et 9 lui aussi en admet quatre : -3, 3 (a-b)3, (b-a)3.
On vérifie facilement, puisque $(a-b)^2=1$, que les 16 rapports possibles ne donnent que quatre rapports distincts qui sont les quatre racines carrées de e : r/3, -r/3, (a-b)r/3, (b-a)r/3.

2) Cf P3.6 1/3=.....(6)7 ; d'où cf D1.3 les huit derniers chiffres de R=r/3 sont les huit derniers chiffres de 05325223×66666667=355014868441741 et donc $[R]_7$=68441741.
Comme R^2=e, on a (voir D1.3) $([R]_7)^2\equiv[e]_7$ (10^8). Vérifions :$([R]_7)^2$=4684271911111081 et $([R]_7)^2-[e]_7=46842719\times10^8$.

Exercice 11

Soit x un entier décadique tel que x^2=e.
On a donc $(x_0)^2\equiv e_0$ (10), donc 10 divise $(x_0)^2-e_0$, or $(x_0)^2$ ne peut se terminer que par 0 ou 1 ou 4 ou 5 ou 6 ou 9 (2, 3, 7, 8 ne sont pas résidus quadratiques de 10), et donc nécessairement e_0=0 ou 1 ou 4 ou 5 ou 6 ou 9.

Montrons maintenant l'aspect haut ⇒ bas de l'équivalence.
On doit avoir aussi $([x]_2)^2\equiv[e]_2$ (1000), soit
$(100x_2+10x_1+x_0)^2\equiv 100e_2+10e_1+e_0$ (1000)
$100(x_1)^2+(x_0)^2+200x_2x_0+20x_1x_0\equiv 100e_2+10e_1+e_0$ (1000) : **relation notée (R)**

On va examiner les quatre cas possibles
1er cas : e_0=1, donc x_0=1 ou 9, d'après $(x_0)^2\equiv e_0$ (10).

si x_0=1
la relation (R) donne

$100(x_1)^2+200x_2+20x_1\equiv 100e_2+10e_1$ (1000), soit

$10(x_1)^2+20x_2+2x_1\equiv 10e_2+e_1$ (100) : donc 2 divise e_1, cad e_1=2p avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 et aussi 10 divise $2x_1-e_1=2(x_1-p)$ et donc 5 divise x_1-p.
On a alors $10(x_1)^2+20x_2+2(x_1-p)\equiv 10e_2$ (100) et $(x_1)^2+2x_2+(x_1-p)/5\equiv e_2$ (10).
Mais puisque 5 divise x_1-p et que $x_1\in\{0;1;...;9\}$ et $0\le p<5$, c'est que x_1=p ou p+5

si x_1=p, alors $p^2+2x_2\equiv e_2$ (10) et donc 2 divise p^2-e_2 et e_2 a la parité de p^2, soit celle de p

si x_1=p+5, alors $p^2+10p+26+2x_2\equiv e_2$ (10), et donc 2 divise encore p^2-e_2 et e_2 a la parité de p^2, soit celle de p

si x_0=9
la relation (R) donne

$100(x_1)^2+1800x_2+180x_1+80\equiv 100e_2+10e_1$ (1000), soit

$10(x_1)^2+180x_2+18x_1+8\equiv 10e_2+e_1$ (100) : donc 2 divise e_1, cad e_1=2p avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 et aussi 10 divise $18x_1+8-e_1=2(9x_1+4-p)$ et donc 5 divise $9x_1+4-p$.
On a alors $10(x_1)^2+180x_2+2(9x_1+4-p)\equiv 10e_2$ (100) et $(x_1)^2+18x_2+(9x_1+4-p)/5\equiv e_2$ (10).
Mais 5 divise $9x_1+4-p$, cad 5 divise $-x_1+4-p$, et puisque $x_1\in\{0;1;...;9\}$ et $0\le p<5$, c'est que $x_1=4-p$ ou $9-p$

si $x_1=4-p$, alors $p^2-8p+16+18x_2+8-2p\equiv e_2$ (10) et donc 2 divise p^2-e_2 et e_2 a la parité de p^2, soit celle de p
si $x_1=9-p$, alors $p^2-18p+81+18x_2+17-2p\equiv e_2$ (10), et donc 2 divise encore p^2-e_2 et e_2 a la parité de p^2, soit celle de p

2ième cas : $e_0=9$, donc $x_0=3$ ou 7, d'après $(x_0)^2\equiv e_0$ (10).

si $x_0=3$
la relation (R) donne

$100(x_1)^2+600x_2+60x_1\equiv 100e_2+10e_1$ (1000), soit

$10(x_1)^2+60x_2+6x_1\equiv 10e_2+e_1$ (100) : donc 2 divise e_1, cad $e_1=2p$ avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 et aussi 10 divise $6x_1-e_1=2(3x_1-p)$ et donc 5 divise $3x_1-p$.
On a alors $10(x_1)^2+60x_2+2(3x_1-p)\equiv 10e_2$ (100) et $(x_1)^2+6x_2+(3x_1-p)/5\equiv e_2$ (10).
Mais puisque 5 divise $3x_1-p$ et que $x_1\in\{0;1;...;9\}$ et $0\leq p<5$, c'est que $x_1=2p$ ou $2p+5$ si $p\leq 2$, $2p-5$ si $p\geq 3$ (pour le voir, par exemple, écrire $3x_1\equiv p$ (5) et multiplier par 2, puisque 6 c'est 1 modulo 5)
si $x_1=2p$, alors $4p^2+6x_2+p\equiv e_2$ (10) et donc 2 divise $p-e_2$ et e_2 a la parité de p
si $x_1=2p+5$, alors $4p^2+20p+25+6x_2+p+3\equiv e_2$ (10), et donc 2 divise encore $p-e_2$ et e_2 a la parité de p
si $x_1=2p-5$, alors $4p^2-20p+25+6x_2+p-3\equiv e_2$ (10), et donc 2 divise encore $p-e_2$ et e_2 a la parité de p

si $x_0=7$
la relation (R) donne

$100(x_1)^2+1400x_2+140x_1+40\equiv 100e_2+10e_1$ (1000), soit

$10(x_1)^2+140x_2+14x_1+4\equiv 10e_2+e_1$ (100) : donc 2 divise e_1, cad $e_1=2p$ avec p=0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4 et aussi 10 divise $14x_1+4-e_1=2(7x_1+2-p)$ et donc 5 divise $7x_1+2-p$.
On a alors $10(x_1)^2+140x_2+2(7x_1+2-p)\equiv 10e_2$ (100) et $(x_1)^2+14x_2+(7x_1+2-p)/5\equiv e_2$ (10).
Ici, il est moins commode de préciser les valeurs de x_1 telles que 5 divise $7x_1+2-p$: cette condition équivaut à $7x_1\equiv p-2$ (5), soit en multipliant par 3, $x_1\equiv 3p-1$ (5), donc $x_1=3p-1+5k$, avec k dans Z : cela va suffire pour pouvoir conclure.
En effet, on a alors
$(3p-1+5k)^2+14x_2+(21p-7+35k+2-p)/5\equiv e_2$ (10), soit $9p^2-6p+1+25k^2+10k(3p-1)+14x_2+4p-1+7k\equiv e_2$ (10), et enfin $9p^2-6p+10k(3p-1)+14x_2+4p+k(25k+7)\equiv e_2$ (10).
Or pour tout k, $k(25k+7)$ est pair, donc 2 divise $9p^2-e_2$, soit 2 divise p^2-e_2 et e_2 a encore la parité de p.

Exercice 12
Si $y=2^{2u}5^{2v}e$ avec u et v deux entiers naturels et e un entier décadique tel que $e_0=1$ ou 9 et $e_1=2p$ (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p, alors d'après P9.7, e est un carré donc y aussi (en effet $e=z^2$ avec z entier décadique, donc $y=x^2$ avec $x=2^u5^vz$ et x est bien entier décadique).
Et aussi 2^{2u}, 5^{2v} et e étant inversibles (voir P3.6 et P4.1), y est inversible, donc non nul et pas diviseur de 0 (voir P8.9).

Montrons la réciproque, cad cette fois on se donne y non nul, pas diviseur 0 et qui est le carré d'un entier décadique.
y n'étant pas diviseur de 0, ni nul il est inversible (voir P8.9) et donc, cf P4.4, il existe deux entiers naturels n et m et e entier décadique se terminant par 1 ou 3 ou 9 tels que $y=2^n5^m e$.

Montrons que n et m sont pairs.

> Sinon l'un au moins est impair et n=2u+r, m=2v+r' avec (r,r')=(1,0) ou (0,1) ou (1,1).
> En posant $a=2^u5^v$, alors
> soit $y=a^2\times 2e$ si (r,r')=(1,0),
> soit $y=a^2\times 5e$ si (r,r')=(0,1),
> soit $y=a^2\times 10e$ si (r,r')=(1,1).
> Mais par hypothèse y est un carré, donc selon les cas, 2e ou 5e ou 10e doit être un carré, ce qui est impossible :
>
> si $2e=x^2$, alors $2e_0\equiv(x_0)^2$ (10), donc 2 divise x_0 :
>
> si $x_0=0$ alors x=10z (z entier décadique), $2e=100z^2$ et $e=50z^2$, donc e se terminerait par 0, ce qui est impossible
>
> si $x_0=2$ ou 4 ou 6 ou 8, x=2z, $2e=4z^2$, $e=2z^2$ et e_0 serait pair, ce qui est aussi impossible
>
> si $5e=x^2$, alors cette fois 5 divise x_0, donc $x_0=0$ ou 5
>
> si $x_0=0$, x=10z, $5e=100z^2$, $e=20z^2$ et e se terminerait par 0, ce qui est impossible
>
> si $x_0=5$, 2x=10z, x=5z, $5e=25z^2$, $e=5z^2$ et se terminerait par 0 ou 5, ce qui est impossible
>
> si $10e=x^2$, x se termine par 0, donc x=10z, $e=10z^2$ et se terminerait par 0, ce qui est impossible.

Donc m et n sont bien pairs, et ainsi, $y=2^{2u}5^{2v}e$ avec e entier décadique se terminant par 1 ou 3 ou 7 ou 9. Mais y étant un carré ($y=z^2$, z entier décadique), e est donc aussi un carré : e est le carré de $2^{-u}5^{-v}z$ qui est bien entier décadique (en effet quoique 2^{-u} et 5^{-v} ne soient pas entiers décadiques, voir P3.6, $2^{-u}5^{-v}z$ est forcément entier décadique car c'est une racine carrée de e et on utilise le 4) de P9.1) et donc on peut appliquer P9.7 : on a $e_0=1$ ou 9 et $e_1=2p$ (avec p =0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4) et e_2 a la parité de p.

Exercice 13

Me demander la solution au cas où...

Exercice 14

1) **4 étant inversible**, $x^2+x+8=0 \Leftrightarrow 4x^2+4x+32=0 \Leftrightarrow (2x+1)^2=-31 \Leftrightarrow$ 2x+1 est une racine carrée de -31.
D'après l'exercice 9, dans NB(10), -31 posséde quatre racines carrées (entières décadiques) : r_1, r_2, r_3, r_4, donc 2x+1 est un de ces quatre nombres et
$x^2+x+8=0$ a quatre solutions qui sont entières décadiques :$(r_1-1)/2$, $(r_2-1)/2$, $(r_3-1)/2$, $(r_4-1)/2$, qui se terminent respectivement par .....3656, ...6343, ...6968, ...3031.

2) En dehors du cas où u=v, et alors l'équation a une seule solution u (rappel : $x^2=0 \Leftrightarrow x=0$), on peut écrire là aussi $(x-u)(x-v)=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x(u+v)+4uv=0 \Leftrightarrow (2x-(u+v))^2=(u-v)^2$, et il suffit d'appliquer P9.3 :
si u-v est diviseur de 0, 2x-(u+v)=u-v ou -u+v et si u-v n'est pas diviseur de 0, 2x-(u+v)=u-v ou -u+v ou (a-b)(u-v) ou (b-a)(u-v).
En conclusion, les solutions dans NB(10) de (x-u)(x-v)=0 sont

si u=v, une seule solution : u

si u≠v

si u-v est diviseur de 0, deux solutions (distinctes) : u et v

si u-v n'est pas diviseur de 0, quatre solutions (distinctes) : u, v, au+bv, bu+av, dont la somme est 2(u+v) et le produit $(uv)^2$

Si u=0, v=1 on est dans le dernier cas et il y a quatre solutions 0, 1, a, b : on retrouve bien sûr le résultat du chapitre 6 sur l'équation $x^2=x$.
Par contre si u=0, v=-1 on trouve que **l'équation $x^2=-x$ a quatre solutions 0, -1, -a, -b** ; voir chapitre 11.

retour début du chapitre 9

Retour vers le sommaire de la page sur les nombres décadiques