Sur l'écriture polynômiale des termes de rang kn de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas en fonction des termes de rang n

1) Introduction

Les suites (F) et (L) étant les suites de Fibonacci initialisées respectivement par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $L_0 = 2,\ L_1 = 1,$ on sait que l'on peut écrire (ref 1, P15)

$F_{kn} = Q_{k,n}(F_n)$ si k est impair, $F_{kn} = L_n Q_{k,n}(F_n)$ si k est pair avec $Q_{k,n}$ polynôme impair à coefficients entiers

$L_{kn} = R_{k,n}(L_n)$ avec $R_{k,n}$ polynôme à coefficients entiers ayant la parité de k.

Il s'agit ici de donner une nouvelle preuve de cette propriété, beaucoup plus rapide, mais en utilisant des résultats généraux sur **les suites** (S) **vérifiant la relation de récurrence** $S_{k+2} = AS_{k+1} + BS_k$ pour tout $k \geq 0$, A et B étant deux constantes : ces suites sont évidemment une généralisation des suites de Fibonacci (ref 2).

On en déduit le résultat suivant (inédit?) : pour tout $k \geq 1$, si k divise F_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ alors pour tout $p \geq 1,\ k^p$ divise $F_{n_0 k^{p-1}}$, ce qui est encore vrai pour la suite (L) à condition de prendre k impair.
Ce résultat généralise le cas particulier connu suivant pour tout $p \geq 1,\ 5^p$ divise F_{5^p} et il permet de montrer (moins connu?) que pour tout $p \geq 1,\ 11^p$ divise L_{11^p}.

1) Lien entre les suites (F) et (L) et deux suites de type (S) particulières.

Pour tout $n \geq 1$ on note $(U^{(n)})$ et $(V^{(n)})$ les suites de type (S) avec $A = L_n$, $B = (-1)^{n-1}$ et initialisées respectivement par $U_0^{(n)} = 0,\ U_1^{(n)} = 1$ et $V_0^{(n)} = 2,\ V_1^{(n)} = A = L_n$.
Il est évident, vu leurs définitions et leurs deux premiers termes, que les termes de ces deux suites sont entiers.

On a alors le résultat suivant : pour tout $n \geq 1,$ tout $k \geq 0,$
$\underline{F_{kn} = U_k^{(n)} F_n}$ (donc F_n divise $F_{kn},$ le quotient étant $U_k^{(n)}$) et $\underline{L_{kn} = V_k^{(n)}}$.

Par exemple, puisque pour tout $k \geq 0,\ U_{k+2}^{(n)} = L_n U_{k+1}^{(n)} + (-1)^{n-1} U_k^{(n)}$,
$U_2^{(n)} = L_n,\ U_3^{(n)} = L_n^2 + (-1)^{n-1},$ d'où pour tout $n \geq 1$
$\underline{F_{2n} = L_n F_n}$ et $F_{3n} = (L_n^2 + (-1)^{n-1})F_n = (5F_n^2 + 3(-1)^n)F_n,$ puisque $L_n^2 - 5F_n^2 = 4(-1)^n,$ ce qui donne $F_9 = (5 \times 4 - 3) \times 2 = 34$.
De même, puisque pour tout $k \geq 0,\ V_{k+2}^{(n)} = L_n V_{k+1}^{(n)} + (-1)^{n-1} V_k^{(n)}$, on a
$L_{2n} = V_2^{(n)} = L_n^2 + 2(-1)^{n-1},\ L_{3n} = V_3^{(n)} = L_n(L_n^2 + 2(-1)^{n-1}) + (-1)^{n-1} L_n = L_n^3 + 3(-1)^{n-1} L_n$ et $L_9 = 4^3 + 3 \times 4 = 76$.

<u>Remarque</u> : prendre $A = -L_n$ en conservant $B = (-1)^{n-1}$ ne change pas fondamentalement les choses puisque dans ce cas
$F_{kn} = (-1)^{k-1} U_k^{(n)} F_n$ et $L_{kn} = (-1)^k V_k^{(n)}$.

<u>preuve</u> :

en notant $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ les racines de $x^2 - x - 1 = 0$, on sait que pour

$n \geq 0$, $F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ et $L_n = \alpha^n + \beta^n$.
On en déduit tout de suite $L_n^2 - 5F_n^2 = (\alpha^n + \beta^n)^2 - (\alpha^n - \beta^n)^2 = 4(\alpha\beta)^n = 4(-1)^n$.
Déterminons maintenant les suites $(U^{(n)})$ et $(V^{(n)})$.
Leur équation caractéristique est $x^2 - L_n x - (-1)^{n-1} = 0$ soit $x^2 - (\alpha^n + \beta^n)x + \alpha^n\beta^n = 0$; cette équation a pour racines α^n et β^n, distinctes car $n \neq 0$, et ainsi $U_k^{(n)}$ et $V_k^{(n)}$ sont des combinaisons linéaires de $(\alpha^n)^k$ et de $(\beta^n)^k$, ce qui donne, compte-tenu de l'inialisation de ces suites,
$U_k^{(n)} = \dfrac{(\alpha^n)^k - (\beta^n)^k}{\alpha^n - \beta^n}$ (on a bien $U_0^{(n)} = 0,\ U_1^{(n)} = 1$)
$V_k^{(n)} = (\alpha^n)^k + (\beta^n)^k$ (on a bien $V_0^{(n)} = 2,\ V_1^{(n)} = L_n$).

De façon immédiate on en déduit $U_k^{(n)} = \dfrac{\dfrac{\alpha^{nk} - \beta^{nk}}{\alpha - \beta}}{\dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}} = \dfrac{F_{kn}}{F_n}$ et $V_k^{(n)} = L_{kn}$.

Si on change $A = L_n$ en $A = -L_n$, l'équation caractéristique ci-dessus devient
$x^2 + (\alpha^n + \beta^n)x + \alpha^n\beta^n = 0$ et ses racines sont alors $-\alpha^n$ et $-\beta^n$. □

2) Ecriture polynômiale de F_{kn} et L_{kn} et propagation de la divisibilité de F_n et de L_n

Rappelons deux résultats sur les suites de type (S) établis au VI de la ref 2 :
A et B étant deux constantes (par rapport à k),
si pour tout $k \geq 0$ $U_{k+2} = AU_{k+1} + BU_k$ avec $U_0 = 0,\ U_1 = 1,$ alors
pour tout $k \geq 1$ on a $U_k = \displaystyle\sum_{0 \leq j \leq \frac{k-1}{2}} C_{k-1-j}^{j} A^{k-1-2j} B^j$: **c'est un polynôme en A de degré** $k-1$ et de parité celle de $k-1$ et les coefficients des $A^{k-1-2j}B^j$ sont entiers
si pour tout $k \geq 0$ $V_{k+2} = AV_{k+1} + BV_k$ avec $V_0 = 2,\ V_1 = A,$ alors
pour tout $k \geq 1$ on a $V_k = \displaystyle\sum_{0 \leq j \leq \frac{k}{2}} \frac{kC_{k-j}^{j}}{k-j} A^{k-2j} B^j$: **c'est un polynôme en A de degré** k et de parité celle de k et les coefficients des $A^{k-2j}B^j$ sont entiers ($\dfrac{kC_{k-j}^{j}}{k-j} = C_{k-1-j}^{j} + 2C_{k-1-j}^{j-1}$).

On notera que si k est impair, V_k est un polynôme impair en A et dont le coefficient de A, obtenu pour $j = \dfrac{k-1}{2}$, est $\dfrac{kC_{k-\frac{k-1}{2}}^{\frac{k-1}{2}}}{k - \frac{k-1}{2}} B^{\frac{k-1}{2}} = kB^{\frac{k-1}{2}}$.

Remarque : on verra aussi au VI de la ref 2 le résultat étonnant (quoique...) suivant :
pour tout $k \geq 0,\ V_k = 2\xi^k T_k(\dfrac{A}{2\xi})$ où ξ est une racine 2ième de $-B$ et T_k le polynôme de Tchebychev (première espèce) de degré k.

2.1) Ecriture polynômiale de F_{kn} et L_{kn} en fonction de F_n et L_n

Le rappel ci-dessus permet de retrouver de façon immédiate les deux résultats de P15 de la ref 1, à savoir :
pour tout $n \geq 1, k \geq 0$

si k est impair $F_{kn} = Q_{k,n}(F_n)$, et si k est pair $F_{kn} = L_n Q_{k,n}(F_n)$ avec $Q_{k,n}$ polynôme impair à coefficients entiers

$L_{kn} = R_{k,n}(L_n)$ avec $R_{k,n}$ polynôme ayant la parité de k et à coefficients entiers.

preuve :

c'est évident pour L_{kn} puisque $L_{kn} = V_k^{(n)}$ (avec $A = L_n$ et $B = (-1)^{n-1}$) : $R_{k,n}$ n'est autre que le polynôme (en $A = L_n$) $V_k^{(n)}$ qui a la parité de k et est à coefficients entiers, B l'étant.

Quant à F_{kn}, on a $F_{kn} = U_k^{(n)} F_n$ où $U_k^{(n)}$ (avec $A = L_n$ et $B = (-1)^{n-1}$) est un polynôme en L_n de parité celle de $k-1$ et à coefficients entiers, B l'étant.

si k est impair, $U_k^{(n)}$ est un polynôme en A pair, or $A^2 = L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$ et ainsi $F_{kn} = F_n\ \times$un polynôme en F_n^2, donc $F_{kn} = Q_{k,n}(F_n)$ où $Q_{k,n}$ est un polynôme impair à coefficients entiers

si k est pair, $U_k^{(n)}$ est un polynôme en A impair, donc $U_k^{(n)} = A \times$ un polynôme en $A^2 = L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$ et ainsi $F_{kn} = F_n \times L_n \times$ un polynôme en F_n^2, donc $F_{kn} = L_n Q_{k,n}(F_n)$ où $Q_{k,n}$ est un polynôme impair à coefficients entiers. □

2.2) **Propagation de la divisibilité de F_n et de L_n**

pour tout $k \geq 1$, si k divise F_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ alors pour tout $p \geq 1$, k^p divise $F_{n_0 k^{p-1}}$

pour tout $k \geq 1$ impair, si k divise L_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ alors pour tout $p \geq 1$, k^p divise $L_{n_0 k^{p-1}}$

(6 divise $L_6 = 36$ mais 6^2 ne divise pas $L_{6\times 6}$)

Remarque 1 :

1) F_n est pair $\Leftrightarrow$ L_n est pair $\Leftrightarrow$ 3 divise n

2) pour tout $k \geq 1$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que k divise effectivement F_{n_0} (résulte de la périodicité de la suite (F) modulo n_0 : voir le 1) f de P13 de la ref 1)

Remarque 2 : j'avais proposé dans l'exercice 20 de la ref 1 la preuve de ce résultat, du moins pour la suite (F) et k impair, et je m'étais contenté de dire dans la solution que l'on pouvait conclure par une récurrence évidente.

Mea-culpa, la récurrence n'étant pas en fait triviale, du moins sans l'utilisation des suites de type (S).

Exemples : voir annexe.

preuve :

d'après le début du 2), pour tout $k \geq 1$, $U_k^{(n)} = \sum_{0 \leq j \leq \frac{k-1}{2}} C_{k-1-j}^{j} A^{k-1-2j} B^j$, avec rappelons le, $A = L_n$ et $B = (-1)^{n-1}$ et d'après le 1) $F_{kn} = U_k^{(n)} F_n$.

1er cas : si k impair divise F_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ alors pour tout $p \geq 1$, k^p divise $F_{n_0 k^{p-1}}$

k étant impair, et puisque $L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n$,

$U_k^{(n)} = \sum_{0 \le j \le \frac{k-1}{2}} C_{k-1-j}^j (5F_n^2 + 4(-1)^n)^{\frac{k-1}{2}-j} B^j.$

$U_k^{(n)}$ est devenu un polynôme en F_n^2 dont le terme constant est

$\rho_k = \sum_{0 \le j \le \frac{k-1}{2}} C_{k-1-j}^j (4(-1)^n)^{\frac{k-1}{2}-j} B^j = \sum_{0 \le j \le \frac{k-1}{2}} C_{k-1-j}^j E^{k-1-2j} B^j$ avec $E^2 = 4(-1)^n$, soit $E = \pm 2$ si n est pair, soit $E = \pm 2i$ si n est impair.

Considérons la suite (X) de type (S) vérifiant, pour tout $p \ge 0$, $X_{p+2} = EX_{p+1} + BX_p$ avec $X_0 = 0$, $X_1 = 1$: d'après le résultat du VI de la ref 2 (rappelé ci-dessus) on a, pour tout $p \ge 1, X_p = \sum_{0 \le j \le \frac{p-1}{2}} C_{p-1-j}^j E^{p-1-2j} B^j.$

Donc $\rho_k = X_k$.

Mais $E^2 + 4B = 4(-1)^n + 4(-1)^{n-1} = 0$ et donc (voir V de la ref 2), pour tout $p \ge 0$, $X_p = p(\frac{E}{2})^{p-1}$ et ainsi, pour tout k impair, $\rho_k = k(\frac{E}{2})^{k-1} = k(\frac{E^2}{4})^{\frac{k-1}{2}} = k(-1)^{\frac{n(k-1)}{2}}$.

Vérifions :

$\rho_3 = C_1^0(4(-1)^n)^1 B^0 + C_1^1(4(-1)^n)^0 B^1 = 4(-1)^n + (-1)^{n-1} = 3(-1)^n$

$\rho_5 = (4(-1)^n)^2 + 3(4(-1)^n)(-1)^{n-1} + (4(-1)^{n-1})^0(-1)^{2(n-1)} = 16 - 12 + 1 = 5.$

Finalement, k étant impair, $F_{kn} = U_k^{(n)} F_n$ où $U_k^{(n)}$ est un polynôme en F_n^2 , à coefficients entiers, son terme constant étant $k(-1)^{\frac{n(k-1)}{2}} = \pm k$.

Soit n_0 tel que k divise F_{n_0} :

k va alors diviser aussi $U_k^{(n_0)}$ puisque ce dernier est un polynôme en $F_{n_0}^2$, à coefficients entiers et de terme constant $\pm k$, et ainsi k^2 divise $F_{n_0 k} = U_k^{(n_0)} F_{n_0}$

De même k^2 divise aussi $U_{k^2}^{(n_0)}$ puisque ce dernier est un polynôme en $F_{n_0}^2$, à coefficients entiers et de terme constant $\pm k^2$, et ainsi k^3 divise $F_{n_0 k^2} = U_{k^2}^{(n_0)} F_{n_0}$

On ne peut aller plus loin, du moins de cette façon, car on ne peut affirmer que k^3 divise aussi $U_{k^3}^{(n_0)}$ car si son terme constant est $\pm k^3$ divisible par k^3, et si les termes en $(F_{n_0})^{2j}$ avec $j \ge 2$ sont divisibles par k^3, on ne peut rien dire pour le terme en $F_{n_0}^2$ sans analyse de son coefficient!

On peut cependant conclure par une récurrence en utilisant, pour tout $p \ge 1$, la suite $(U^{(n_0 k^{p-1})})$: <u>pour tout $j \ge 0$,</u> $U_j^{(n_0 k^{p-1})}$ est un polynôme en $(F_{n_0 k^{p-1}})^2$ à coefficients entiers et de terme constant $\pm j$ et on a $F_{j n_0 k^{p-1}} = U_j^{(n_0 k^{p-1})} F_{n_0 k^{p-1}}$.

Supposons que k^p divise $F_{n_0 k^{p-1}}$ pour $p \ge 1$ (c'est vrai pour $p = 1$ par hypothèse).

Le terme de rang k de la suite $(U^{(n_0 k^{p-1})})$, à savoir $U_k^{(n_0 k^p)}$, est évidemment divisible par k (car k divise toutes les puissances de $(F_{n_0 k^{p-1}})^2$ et divise aussi le terme constant de $U_k^{(n_0 k^p)}$ qui est $\pm k$), donc $k \times k^p$ divise $U_k^{(n_0 k^p)} \times F_{n_0 k^{p-1}} = F_{n_0 k^p}$

et la propriété est vraie au rang $p + 1$.

Donc, si k impair divise F_{n_0}, pour tout $p \ge 1$, k^p divise $F_{n_0 k^{p-1}}$.

<u>2ième cas : si k impair divise L_{n_0} $(n_0 \ge 1)$ alors pour tout $p \ge 1$, k^p divise $L_{n_0 k^{p-1}}$</u>

Là aussi faisons une récurrence en utilisant, pour tout $p \ge 1$, la suite $(V^{(n_0 k^{p-1})})$:

pour tout $j \geq 0$, $V_j^{(n_0 k^{p-1})}$ est un polynôme en $A = L_{n_0 k^{p-1}}$, ayant la parité de j, à coefficients entiers, et, lorsque j est impair, le coefficient de $L_{n_0 k^{p-1}}$ est $j(-1)^{\frac{(n-1)(k-1)}{2}} L_{n_0 k^{p-1}} = \pm j$ (voir début du 2).

Supposons que k^p divise $L_{n_0 k^{p-1}}$ pour $p \geq 1$ (c'est vrai pour $p = 1$ par hypothèse).

D'après le 1), $L_{n_0 k^p} = V_k^{(n_0 k^{p-1})}$ et cf ci-dessus, $L_{n_0 k^p}$ est un polynôme en $A = L_{n_0 k^{p-1}}$ impair (car k impair), à coefficients entiers et le coefficient de $L_{n_0 k^{p-1}}$ est $\pm k$.

Pour tout $j \geq 1$, $(L_{n_0 k^{p-1}})^{2j+1}$ est divisible par $k^{p(2j+1)}$, donc par k^{p+1} et $\pm k L_{n_0 k^{p-1}}$ étant aussi divisible par k^{p+1}, $L_{n_0 k^p} = V_k^{(n_0 k^{p-1})}$ est divisible par k^{p+1} et la propriété est vraie au rang $p+1$.

Donc si k impair divise L_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ alors pour tout $p \geq 1$, k^p divise $L_{n_0 k^{p-1}}$.

3ième cas : si $2^q k$, avec $q \geq 1$, k impair, divise F_{n_0} $(n_0 \geq 1)$ alors pour tout $p \geq 1$, $(2^q k)^p$ divise $F_{n_0 (2^q k)^{p-1}}$

Notons tout de suite que F_{n_0} étant pair, c'est que n_0 est divisible par 3.

L'hypothèse implique que k, impair, divise F_{n_0}, donc d'après le 1er cas k^p divise $F_{n_0 k^{p-1}}$, donc divise $F_{n_0 (2^q k)^{p-1}}$ puisque d'après le 1), si u divise v, alors F_u divise F_v.

Et de la formule $F_{2p} = F_p L_p$ on déduit que

$F_{n_0 (2^q)^{p-1}} = F_{n_0} L_{n_0} L_{2n_0} L_{2^2 n_0} \ldots L_{2^{q(p-1)-1} n_0}$: comme n_0 est divisible par 3, les $q(p-1)$ termes de la suite de Lucas apparaissant dans ce produit sont tous pairs, donc leur produit est divisible par $2^{q(p-1)}$.

Et puisque 2^q divise F_{n_0}, c'est que $2^q \times 2^{q(p-1)} = 2^{qp}$ divise $F_{n_0 (2^q)^{p-1}}$, donc divise $F_{n_0 (2^q k)^{p-1}}$.

Finalement $F_{n_0 (2^q k)^{p-1}}$ est divisible par k^p et $(2^q)^p$, nombres qui sont premiers entre eux et donc $(2^q k)^p$ divise $F_{n_0 (2^q k)^{p-1}}$. $\square$

Référence 1 : http://alain.pichereau.pagesperso-orange.fr/fibonacci.pdf

Référence 2 : http://alain.pichereau.pagesperso-orange.fr/AB-8-fibo-monsite.pdf

$\boxed{\textbf{Annexe : exemples pour illustrer le 2.2}}$

Exemples pour la suite (F)

3 divise $F_4 = 3$, donc $\boxed{3^p \text{ divise } F_{4\times 3^{p-1}}}$:

en particulier 27 divise $F_{36} = 14930352 = 27 \times 552976$ (non divisible par 81) ; en fait c'est L_{18} qui est divisible par 27

<u>Remarque</u> : on sait que 3 divise $F_n \Leftrightarrow$ 4 divise n (exercice 1 de ref 1)

4 divise $F_6 = 8$, donc $\boxed{4^p \text{ divise } F_{6\times 4^{p-1}}}$:

en particulier, 16 divise $F_{24} = 46368 = 16 \times 2898$, non divisible par 64

5 divise $F_5 = 5$, donc $\boxed{5^p \text{ divise } F_{5^p}}$:

en particulier 25 divise $F_{25} = 75025 = 25 \times 3001$ (non divisible par 125)

6 divise $F_{12} = 144$, donc $\boxed{6^p \text{ divise } F_{12\times 6^{p-1}}}$:

en particulier 6^2 divise $F_{12\times 6} = F_{72} = F_{36}L_{36}$; en fait $F_{36} = 14930352$ est divisible par 36 (L_{36} n'est pas divisible par 3)

et aussi, 6^3 divise $F_{12\times 36} = F_{432} = F_{54}L_{54}L_{108}L_{216}$; en fait 8 divise $F_{54} = 86267571272$ (non divisible par 3) alors que 27 divise $L_{54} = 192900153618$ (non divisible par 4)

7 divise $F_8 = 21$, donc $\boxed{7^p \text{ divise } F_{8\times 7^{p-1}}}$

en particulier 49 divise $F_{56} = 225851433717 = 49 \times 4609212933$ (non divisible par 343) ; en fait c'est L_{28} qui est divisible par 49 et pas par 343

8 divise $F_{12} = 144 = F_6 \times L_6 = 8 \times 18$, donc $\boxed{8^p \text{ divise } F_{12\times 8^{p-1}}}$:

en particulier 64 divise $F_{96} = F_{12}L_{12}L_{24}L_{48}$, bien divisible par 64 car 16 divise F_{12} et L_{12}, L_{24} sont pairs.

9 divise $F_{12} = 144$, donc $\boxed{9^p \text{ divise } F_{12\times 9^{p-1}}}$:

en particulier 81 divise $F_{108} = F_{54} \times L_{54}$; en fait $L_{54} = 192900153618$ est divisible par 81 (mais pas par $81^3 = 729$) alors que $F_{54} = 8627571272$ n'est même pas divisible par 3.

Exemples pour la suite (L)

3 divise $L_2 = 3$ donc $\boxed{3^p \text{ divise } L_{2\times 3^{p-1}}}$:

en particulier 9 divise $L_6 = 18$

3 divise $L_6 = 18$ donc $\boxed{3^p \text{ divise } L_{6\times 3^{p-1}} = L_{2\times 3^p}}$:

en particulier 9 divise $L_{18} = 5778 = 9 \times 642$

11 divise $L_5 = 11$ donc $\boxed{11^p \text{ divise } L_{11^p}}$:

en particulier 121 divise L_{121} lequel comporte 26 chiffres et via le critère de divisibilité par 11 (la somme alternée des chiffres doit être divisible par 11) on peut (on doit ...) vérifier effectivement la divisibilité par 11 de L_{121}.